РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *М. К. Керимов*
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, В. М. Курочкин, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, С. П. Фиников, С. В. Фомин*

Рефераты 3536 – 4143 **№ 8** **Август 1955 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

3536. О профессии математика. Колмогоров (Despre profesia de matematician. Colmogorov A. N.), Rev. mat. şi fiz., 1953, **4**, № 5, 109—115 (рум.)

3537. Расцвет науки в Армении. Амбарцумян (Розквіт науки у Вірменії. Амбарцумян В. А.), Наука і життя, 1954, № 11, 28—29 (укр.)

3538. Деятельность Польской академии наук за 1954 г. в свете намеченных планов работ (Działalność Polskiej Akademii Nauk w roku 1954 w świetle planów prac), Sprawozd. czynności i prac, 1954, **2**, № 3, 45—107 (польск.)

3539. Отчет ученого секретаря Польской академии наук за 1953 г. (Sprawozdanie sekretarza naukowego PAN za rok 1953), Sprawozd. czynności i prac, 1954, **2**, № 3, 21—44 (польск.)

Указывается, что в области математики особое внимание было уделено разработке проблем, связанных с потребностями народного хозяйства. В 1953 г. закончен также ряд работ по основаниям математики и топологии. Приложен список научных учреждений Польской академии наук, открытых в 1953 г., и план работ отделений.

3540. Научное заседание I секции Чехословацкой академии наук. Книхал (Vědecké zasedání I. sekce Československé akademie věd. Knichal Vl.), Časop. pěstov. mat., 1954, **79**, № 4, 382—386 (чеш.)

Приводятся краткие резюме математических докладов, прочитанных на заседании секции 13—14 апреля 1954 г.

3541. Первая конференция по математической статистике в Праге. Новак (První pracovní konference československých matematických statistiků v Praze. Novák Josef), Časop. pěstov. mat., 1954, **79**, № 4, 379—382 (чеш.)

27—30 июня 1954 г. в Праге состоялась конференция по математической статистике. Приводится перечень докладов и сообщений.

3542. Бесконечность в математике. Сухомлинов Г. А., Тр. физ.-матем. фак. Киргизск. ун-та, 1953, № 2, 3—12

Научно-популярная статья.

3543. Математика и индустрия. Сагредо (Matematica e industria. Sagredo), Civiltà macch., 1953, **1**, № 1, 24—26 (итал.)

Приводится краткий отчет о деятельности итальянского Национального института прикладной математики, созданного по инициативе М. Пиконе 25 лет тому назад. По решению ЮНЕСКО от 1946 г. при этом институте должен быть организован всемирный вычислительный центр. Институт за время своего существования опубликовал около 1000 работ по различным областям прикладной математики (приближенное решение алгебраических, функциональных и дифференциальных уравнений, решение задач, связанных с атомной физикой, геофизикой, оптикой, механикой и т. д.). Институт собирается обновить таблицы артиллерийской стрельбы. В Неаполе специально для указанного института строится электронная счетная машина. М. К. Керимов

3544. О книге С. А. Яновской «Передовые идеи Лобачевского — орудие борьбы против идеализма в математике». Шоош (Sz. A. Janovskaja «Lobacsevszkij haladó eszméi — az idealizmus elleni harc eszközei a matematikában» című könyvének ismertetése. Soós Gyula), A magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl. 1953, **3**, № 2, 285—288 (венг.)

3545. Некоторые новейшие «откровения» буржуазных гносеологов. Курсанов Г. А., Вестн. АН СССР, 1954, № 10, 72—81

Дается критический обзор новых высказываний буржуазных гносеологов, главным образом представителей основных направлений: прагматизма и позитивизма (Дьюи, Пап, Рассел, Смит, Фейлз, Браун, Гримэн, Веркмейстер, Гейзенберг, Милн и др.).

Отмечается продолжающаяся тенденция эксплуатации математики и ее абстрактного характера в пользу идеализма и фидеизма («математическая мудрость бога»), искажающая природу математики и принижающая ее познавательное значение. Характерна прагматическая «логика насилия», придающая силе «доказательный» характер при установлении истины и смыкающаяся с пресловутой политикой «с позиции силы».

Симптоматична для «развития» идеализма и перехода к идеализму новейшей формации замена берклианского тезиса «быть — значит быть воспринимаемым» тезисом «быть — значит быть представляемым», узаконивающим любую иллюзию и с полной откровенностью выражающим отказ от объективного знания.

Новые высказывания буржуазных гносеологов квалифицируются как показатель дальнейшей деградации современной буржуазной философии. Знаменательно, что позиция современной буржуазной философии в ее борьбе против философии диалектического материализма есть позиция ликвидации науки и научного мышления.

Л. П. Гокиели

3546 К. Общий курс математики. Т. 1, 2. Поттер, Бек (General mathematics. Potter Mary Athena, Beck H. R., 368+428 p., Ginn., 1953, v. 1, 2. 32 doll., v. 2, 2.44 doll.), Cumul. Book Index, 1954, **57**, № 3, 77 (библ.)

3547 К. Труды 11 го Международного конгресса по философии (Proceedings of the 11th International congress of philosophy. Vol. 5. Logic, Philosophical Analysis, Philosophy of mathematics. 225 p., 17 s. Vol. 6: Philosophy and metodology of the sciences of nature. 268 p., 21 s. Vol. 14: Additional volume and contributions to the symposium on logic. 348 p., 23 s. Amsterdam, North-Holland Publishing Co. 1953), Books and periodicals catalog, North-Holland Publ. Co., 1954, p. 43 (библ.)

3548 К. Сочинения. Том I. Дини (Opere. Vol. I. Dini Ulisse. A cura dell'Unione matematica Italiana. Roma, Edizioni Cremonese della Casa Editrice Perrela, 1953) (итал.)

Итальянское математическое объединение начинает этой книгой издание трудов Дини, рассчитанное на 3 тома. Первый том содержит портрет Дини, предисловие Сансоне, некролог Дини, принадлежащий Бианки, полный перечень сочинений Дини и перечень некрологов и заседаний, посвященных Дини. Следуют 2 основные части. I. Алгебраические работы (стр. 18—192), II. Работы Дини в области дифференциальной геометрии (стр. 193—694). «Алгебраические» работы, среди которых находятся его фундаментальные работы о рядах с положительными членами и об оценке корней алгебраического уравнения а также лекции по общей теории рядов, изданы и снабжены введением Чиполла. Работы по дифференциальной геометрии, которые характеризуют первый период научной деятельности Дини и представляют собой значительный вклад в классическую дифференциальную геометрию поверхностей и сетей кривых на них, изданы Бортолотти и снабжены введением с историческими и литературными ссылками.

Прекрасное, образцовое во всех отношениях, издание; редактор и издательство заслуживают, в равной мере высокой оценки. O. Volk

Перевод из Zbl. Math., 1954, 51, 1

См. также: 4005

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

3549. О «гиппопеде» Евдокса. Нёйгебауэр (On the «Hippopede» of Eudoxus. Neugebauer O.), Scripta math., 1953, 19, № 4, 225—229 (англ.)

Открытие Евдокса, состоявшее в том, что движение планет может быть объяснено сочетанием равномерных вращений концентрических сфер вокруг наклонных к плоскости эклиптики осей, было надолго забыто. И только Шаубах (1802) и Иделер (1828/1830) занялись им.

Детали построения Евдокса были раскрыты Скиапарелли (Schiaparelli G., Scritti sulla storia della astronomia antica, v. 2, 1874, 3—112). Но его выводы об основных свойствах кривой, по которой движется планета, крайне усложнены и затушевывают первоначальную картину. Автор проводит элементарное геометрическое исследование, позволяющее весьма просто объяснить открытие «гиппопеды» и восстановить путь, которым шел Евдокс. А. Е. Раик

3550. Шесть столетий преподавания математики и астрономии в Карловом университете в Праге. Феттер (Šest století matematického a astronomického učení na universitě Karlově v Praze. Vetter Q.), Věst. Královské české společ. nauk. Třída mat.-přírodoved., 1952, 1—40 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (чеш.; резюме русс.)

В 1948 г. исполнилось 600 лет со дня основания Пражского университета. Настоящая статья содержит краткие сведения о математиках и астрономах, работавших в университете в течение всего этого времени.

Начиная с основания университета и до трагической для чешского народа битвы на Белой Горе под Прагой в 1620 г., уровень преподавания математики и астрономии в нем был более высоким, чем во многих европейских университетах. В Праге вели научную деятельность по астрономии и математике Тихо Браге (1546—1601) и Кеплер (1571—1630), находившиеся в тесном общении с профессорами университета. Из чешских профессоров в качестве первого выдающегося астронома упоминается Гавел (читал лекции с 1350 до 1360 г.), первого крупного математика — магистр Енек из Праги (преподавал с 1366 до 1380 г.). Из последующих профессоров особо отмечаются Кршиштян из Прахатиц (1368—1450), Тадеаш Гаек из Гаек (1525—1601) и Мартин Бахачек из Ноумержиц (около 1540—1612).

В 1622 г. университет был объединен с иезуитской академией. Преподавание математических и вообще естественных наук пришло в упадок. Лишь во второй половине XVII в. была восстановлена должность профессора математики. Из профессоров иезуитской академии наибольшую известность в истории математики получили Григорий Сен-Винцент (1584—1667), работавший в Праге с 1626 до 1631 г., и Якоб Креса (1648—1715), преподававший математику в Пражской академии 1679—1682 гг. и 1703—1714 гг. и являвшийся одним из основателей математического и физического музея.

Новый подъем математического и астрономического образования в Пражском университете начался с середины XVIII столетия и был связан с реформой университетского преподавания. С 1752 г. было увеличено число часов на преподавание математики. Организована физическая лаборатория, в 1752 г. основана обсерватория. Впервые были введены курсы аналитической геометрии и исчисления бесконечно малых. Наиболее активно работал над реорганизацией преподавания математик и астроном И. Степлинг (1716—1778), автор многих трудов, широко образованный ученый, находившийся в научной переписке с Христианом Вольфом (1679—1754), Л. Эйлером (1707—1783), де Лаландом (1732—1807), Босковичем (1711—1787) и др. Ученики и сотрудники Степлинга: Ян Тесанек (1728—1788), профессор высшей или «трансцендентальной» математики, и Станислав Выдра (1741—1804), профессор элементарной математики, были передовыми учеными своего времени. Позднее в университете было введено преподавание прикладной математики Ф. А. Л. Гергетом (1741—1800), являвшимся также одним из основателей высшего инженерного образования. Среди преемников этих ученых насчитывается немало выдающихся имен: Б. Больцано (1781—1848), Я. Ф. Кулик (1793—1863), известный как специалист по теории чисел, и др.

Разделение Пражского университета на чешский и немецкий, происшедшее в 1882 г., вызвало дальнейший подъем национальной чешской науки. Ведущим математиком чешского университета был в то время Ф. И. Студничка (1836—1903). Его работы, общим числом 321, посвящены алгебре, теории чисел, теории функций, истории математики, физике, метеорологии и т. д. Современниками Студнички являлись братья Эмиль (1848—1891) и Эдуард Вейр (1852—1903), геометрические работы которых были широко известны в других странах. В немецком университете профессора част

менялись и серьезной научной школы не было создано.

Судьба университета, а следовательно, и история развития в нем отдельных наук были всегда тесно связаны с экономической, политической и культурной жизнью чехословацкого народа. Основание Чехословацкой республики в 1918 г. и особенно освобождение чехословацкого народа от фашистской оккупации и капиталистического рабства обусловили расцвет математики и астрономии в народно-демократической Чехословакии. В статье приводится много имен ныне здравствующих математиков и астрономов, заслуживших международную известность. Среди них Э. Чех (род. 1893), В. Ярник (род. 1897), М. Катетов (род. 1918) и др.

Примечание референта. В статье не освещено содержание упоминаемых автором книг и статей, нет анализа научной деятельности ученых.

О развитии математики в Чехословакии см. РЖМат, 1954, 3558—3562; 3941, 3942; 5409, 5412, 5415, 5416.

К. А. Рыбников

3551. Из истории логарифмов. Оливотто (Din istoria logaritmilor. Olivotto I.), Gaz. mat. şi fiz., 1954, **B5**, № 5, 123—127 (рум.)

Краткое изложение известных исторических сведений о логарифмах.

3552. Революция математиков. Тейлор (The mathematicians' revolution. Taylor E. G. R.), Geogr. Mag., 1953, **26**, № 8, 409—416 (англ.)

В статье говорится о возникновении в Англии на протяжении второй половины XVI и XVII вв. новой общественной группы ученых и техников, сыгравшей важную роль в экономическом и социальном прогрессе страны. Важнейшим элементом в подготовке этих ученых и техников было овладение математикой. Англия XVI в. была экономически и культурно отсталым государством. В ней остро чувствовался недостаток в ученых и техниках, подавляющее большинство которых было иностранцами — французами, немцами, португальцами и др. В университетах господствовала схоластика; к математикам нередко относились с недоверием, считая их чем-то вроде колдунов. Положение вещей начало меняться во второй половине XVI в. В 1570 г. Джон Ди (Dee, 1527—1608) в предисловии к первому английскому переводу «Начал» Евклида, выражая мнение передовых кругов буржуазии, подчеркнул практическое значение математического образования для прогресса землемерия, артиллерии, фортификации, мореплавания, горного дела, картографии, астрономии (а также и для астрологии). К 1684 г. примерно на пять с половиной миллионов населения Англии числилось около 15 000 лиц, занимавшихся «свободными искусствами» и наукой. Большинство ученых, преподавателей, землемеров, мастеров, изготовлявших научный инструментарий, и пр. были выходцами из небогатых семейств фермеров, сельских священников, служащих. Во второй половине XVII в. значительную роль в распространении научных и технических знаний сыграло Лондонское королевское общество. В XVIII в. численность научно-технической интеллигенции в Англии быстро возрастала, хотя большая часть учащихся в школах продолжала получать в основном гуманитарное образование. Автор сравнивает положение вещей в современной Англии (а также других капиталистических и колониальных странах) с положением в XVI—XVII вв. Он отмечает, что и нынешняя высшая английская школа с ее традиционным «джентельменским» направлением образования готовит больше людей, которые говорят и пишут о вещах, чем людей, которые участвуют в изготовлении вещей, между тем как для процветания страны нехватает ученых и инженеров.

А. П. Юшкевич

3553. О вкладе Галилея в основы динамики. Галли (Sui contributi di Galileo alla fondazione della dinamica. Galli Mario), Boll. Unione mat. ital., 1954, 9, № 3, 289—300 (итал.)

3554. Об однополостном гиперболоиде вращения. Тенка (Sull'iperboloide a una falda di rotazione. Tenca Luigi), Boll. Unione mat. ital., 1954, 9, № 1, 89—91 (итал.)

Отметив, что архитектор Врен (Wren, 1631—1723), а раньше него Вивиани, рассматривая однополостный гиперболоид вращения, не считали его новой поверхностью, автор высказывает предположение, что эта поверхность была известна еще древним.

Р. Н. Щербаков

3555. Польский геометр. Земба (Geometra polski: Ziemba Jan), Matematyka, 1953, 6, № 1, 11—19 (польск.)

Даются сведения о книге «Геометр польский» Станислава Сольского, изданной в Кракове в 1683—1686 гг. Обширный труд этот как по объему (644 стр., формата 17 × 26,5 см), так и по терминологии и изложению представляет значительный шаг вперед по сравнению с первой книгой по математике на польском языке «Алгоритм» Т. Клоса (Kłos Tomasz, Algorithmus to iest Nauka Liczby), вышедшей в Кракове в 1537 г. «Геометр польский» это руководство по теоретической и прикладной геометрии, включающее черчение, приемы межевания и указания для изготовления геометрических и землемерных инструментов. В книге дают и польские меры длин и площадей того времени и вычисление длины земного меридиана с погрешностью в 3,5% сравнительно с современными данными. Сольский стоял на высоте науки своего времени. Для числа π он, например, кроме значений 22/7 и 355/113, знал и лудольфово число и давал способ приближенного построения $\pi \approx 3\,15470$, принадлежащий его учителю Бурдецкому.

В книге еще нет вошедшего в учебники известного построения приближенного значения π, данного в 1685 г. современником автора польским же математиком Коханским. В книге содержится таблица длин сторон правильных вписанных в круг радиуса 10 000 000 многоугольников, включая a_{20} и a_{80}.

Многие правила вычислений выражены в стихах. Книга Сольского по общему своему характеру в польской учебной литературе представляет явление, аналогичное «Арифметике» Магницкого в русской литературе.

И. Я. Депман

3556. О характерных чертах арифметических рукописей XVII столетия. Швецов К. И., Матем. в школе, 1954, № 5, 1—10

Бо́льшая часть работы посвящена разбору арифметических рукописей первой половины XVII столетия. Выводы автора сформулированы следующим образом:

1. «...у древнерусских арифметиков XVII столетия отсутствовало ясное представление о предмете и о том общем, что скрывается под видимым разнообразием частных случаев» (стр. 8).

2. «Сравнение западноевропейских учебников XVII столетия с древнерусскими арифметическими рукописями XVII столетия приводит к заключению, что уровень знаний по арифметике на Руси в научном и методическом отношении был не ниже, чем в Западной Европе» (стр. 10).

Первый из выводов совпадает с утверждением В. В. Бобынина (Бобынин В. В., Очерки истории развития физико-математических знаний в России в XVII столетии, вып. 1, М., 1886, стр. 67—68). Суждение, подобное второму выводу, было высказано А. П. Юшкевичем (Юшкевич А. П., Матем. в школе, 1947, № 1, 36—37).

А. Е. Раик

3557. 250 лет «Арифметики» Л. Ф. Магницкого. Гнеденко, Погребысский (250 років «Арифметики» Л. П. Магницького. Гнеденко Б. В., Погребиський Й. Б.), Вісник АН УРСР, 1953, № 7, 53—63 (укр.)

Статья содержит краткие биографические сведения о Леонтии Магницком и характеристику его опубликованной в Москве в январе 1703 г. знаменитой «Арифметики» — первенца русской печатной научно-технической литературы.

Опровергнув восходящие еще к Феофану Прокоповичу неправильные представления об отсутствии математических знаний в допетровской России, авторы трактуют Магницкого как представителя тех слоев, которые, не принадлежа к боярско-дворянской верхушке, еще в допетровской Руси проявляли интерес к развитию науки. Именно эти научные интересы подготовили Магницкого,— как личность, сложившуюся еще до эпохи петровских реформ (о чем свидетельствует участие его в деле о «ереси» Тверитинова),— к его, по заслугам оцененной историей, плодотворной работе над новыми заданиями, выдвинутыми эпохой.

При освещении содержания «Арифметики» особенно подчеркиваются: 1) ее прикладные тенденции и вообще передовые черты мировоззрения ее автора; 2) ее роль в создании русской математической терминологии (термины: «счисление», «сложение», «вычитание», «умножение», «деление»); 3) введение, в связи с приближенным вычислением квадратных и кубических корней, основ теории десятичных дробей и действий с ними; 4) то обстоятельство, что «Арифметика» Магницкого была подготовлена как предшествовавшими ей русскими математическими рукописями, из которых Магницкий заимствовал более половины задач, так и новыми требованиями эпохи.

Авторы убедительно возражают против мнения В. В. Бобынина, будто книга была задумана / и начата) еще до организации Московской школы «математических и навигацких» наук и не как учебник для нее.

Примечание референта. 1. «Мы знаем— пишут авторы — год его (Магницкого) рождения», но этот год (1669) в статье не указан. 2. Фраза о том, что и «от твари творец познавает и удивляем паче бывает», из которой делается правильный, по мнению референта, вывод относительно гносеологических взглядов Магницкого, содержит опечатку: должно быть не «познавает», а «познаваем». 3. Об «Арифметике» Магницкого у нас существует большая литература — «Арифметике» посвящен, в частности, § 4, гл. 1 в книге одного из авторов (Гнеденко Б. В., Очерки по истории математики в России, М.— Л., Гостехиздат, 1946), в значительной мере использованный в статье; однако, помимо случайных ссылок на книжку Д. Д. Галанина (Леонтий Филиппович Магницкий и его арифметика, вып. 1, М., 1914), никаких указаний на литературу о Магницком статья не содержит. С. А. Яновская

3558. Ян Снядецкий — математик эпохи польского просвещения. Дюр (Jan Śniadecki — matematyk polskiego oświecenia. Dür Samuel), Matematyka, 1954, 7, № 3, 10—18 (польск.)

Освещается состояние естественных и математических наук в Польше, начиная со второй половины XVI до второй половины XVIII вв. и затем во второй половине XVIII и в начале XIX вв., когда протекала научная и научно-популяризационная деятельность Яна Снядецкого, всесторонне образованного польского математика тех времен. Учебные руководства Снядецкого по алгебре и сферической тригонометрии: «Теория алгебраического исчисления, примененная к кривым линиям» (1783 г.) и «Сферическая тригонометрия в аналитическом изложении» (1817 и 1820 гг.) — сыграли выдающуюся роль в распространении математических знаний в Польше в конце XVIII и первой половине XIX в. Снядецкому принадлежит также первая в Польше работа в области теории вероятностей, развитию исследований в которой он придавал важное значение. Большой интерес представляют философские работы Снядецкого в области математики, в которых он занимал передовые для того времени методологические позиции. Борьба Снядецкого за народный язык в науке, созданием им польской математической терминологии сыграл значительную роль в деле развития научных исследований в Польше. И. З. Штокало

3559. С. В. Ковалевская — выдающийся русский математик. Голдун А. А., Матем. в школе, 1953, № 2, 66—71

3560. Нильс Хенрик Абель. Новые биографические сведения. Брун (Niels Henrik Abel. Neue biographische Funde. Brun Viggo), J. reine und angew. Math., 1954, **193**, № 3/4, 239—249 (нем.)

Сообщаются факты и соображения, дополняющие и исправляющие известные изложения биографии Абеля (в особенности изложение Ф. Клейна в «Лекциях о развитии математики в XIX столетии»). Автор отмечает, что биографы обычно преувеличивали бедность Абеля, неверно характеризовали его как «совершенного самоучку», которому были доступны лишь немногие книги (на самом деле, Абель в 16 лет под руководством Хольмбе штудировал Эйлера, Лакруа, Франкера, Пуассона, Гаусса, Даламбера и Ньютона), защищает памятник Абелю в Осло против критики Клейна и т. д.

Указывается, что Лежандр и Коши, вопреки распространенному утверждению, дали еще в 1829 г. отзыв о знаменитом «Мемуаре об одном весьма обширном классе трансцендентных функций» и подробно рассказывается о судьбе рукописи этого мемуара. Рукопись считалась «окончательно пропавшей» (Ф. Клейн), пока автор в 1952 г. не обнаружил ее (без нескольких страниц) в библиотеке Moreniana во Флоренции, куда она попала из архива Г. Либри, готовившего рукопись к опубликованию. Приводятся фотокопии первой и последней страниц рукописи. А. И. Маркушевич

3561. Анри Пуанкаре и физические теории. Де-Бройль (Henri Poincaré et les théories de la physique. Broglie Louis de), Astronomie, 1954, 68, juin, 217—229 (франц.)

См. РЖФиз, 1955, 15598.

3562. Забытый портрет М. В. Остроградского. (Публикация портрета работы франц. художника С. Ш. Жиро. 1840 г.). Макарова В. И., Тр. Ин-та истории естеств. и техн. АН СССР, 1954, **1**, 317—319

3563. Леонард Юджин Диксон. Де-Бройль (Leonard Eugene Dickson. Broglie Maurice de), C. r. Acad. sci., 1954, **239**, № 24, 1728—1729 (франц.)

Некролог известного математика Диксона (1874—1954).

3564. Умер Евгений Буницкий. Билый (Eugen Bunickij zemřel. Bílý Josef), Časop. pěstov. mat., 1953, **78**, № 3, 287—290 (чеш.)

Некролог чешского математика лектора Карлова университета Буницкого (1874—1952).

3565. Умер проф. д-р Ян Войтех. Вычихло (Prof. dr Jan Vojtěch zemřel. Vyčichlo F.), Časop. pěstov. mat., 1953, **78**, № 3, 283—286 (чеш.)

19 января 1953 г. скончался профессор Высшей технической школы в Праге Ян Войтех (1879—1953). Приложен список его печатных работ.

3566. Памяти Жерме. Деалю, Паувен, Гебан, Брювье (In memoriam: R. H. Germay. Dehalu M., Pauwen L. J., Gueben G., Bruwier L.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1954, **23**, № 6-7-8, 251—266 (франц.)

Некролог бельгийского математика Жерме (1894—954).

3567. Выдающийся математик (25 лет со дня смерти А. Размадзе). Цитландзе Э. (გამოჩენილი მათემატიკოსი (ანდრია რაზმაძის გარდაცვალების 25 წლისთავის გამო). წითლანაძე ე.), მეცნიერება და ტექნიკა. (Мецниереба да техника), 1954, № 12, 14—16 (груз.)

Краткие сведения о жизни и научной деятельности профессора Тбилисского университета Андрея Михайловича Размадзе (родился в 1890 г., умер в 1929 г.).

3568. Пьер Эмбер (Некролог). Серджеску (Notice nécrologique. Pierre Humbert. Sergescu P.), Arch. internat. histoire sci., 1954, 7, № 27, 181—183 (англ.)

Некролог французского математика и астронома Эмбера (1891—1953).

3569 К. От Ахмеса до Евклида. Главы из книги по истории математики. Бюнт (Van Ahmes to Euclides. Hoofdstukken uit de geschiedenis van de wiskunde. Bunt L. N. H. VII + 171 bl., Groningen, J. B., Wolters, Geill 5.50), Nieuwe Uitgaven in Nederland, 1954, 16, № 10, 116 (библ.)

3570 К. Рассуждение о методе с приложениями. Диоптрика, Метеоры, Геометрия. Декарт Рене. Редакция, перевод статьи и комментарии Г. Г. Слюсарева и А. П. Юшкевича. 656 стр., М.— Л., Изд-во АН СССР, 1953, 26 р. 50 к.

«Рассуждение о методе», занимающее центральное положение во всей философии Декарта и являющееся в некотором смысле общим предисловием к трактатам «Диоптрика», «Метеоры» и «Геометрия», без этих трактатов издавалось в русском переводе неоднократно (первый перевод историка физики Н. А. Любимова вышел в свет в 1886 г., новый перевод В. В. Соколова содержится в «Избранных произведениях» Декарта, опубликованных в 1950 г.). Перевод «Геометрии», с приложением избранных работ Ферма и переписки Декарта, выполненный А. П. Юшкевичем, был опубликован с его же примечаниями и статьей в 1938 г.

Реферируемое издание представляет собой, однако, первый полный перевод «Рассуждения о методе» со всеми его приложениями.

Не только для философа, но и для читателя, которого в связи с историей математики интересует именно «Геометрия» Декарта, такое издание представляет особый интерес. Оно позволяет непосредственно выяснить методологические основы «Геометрии», ее место в философской и естественно-научной системе Декарта. Благодаря опубликованию «Геометрии» непосредственно вслед за «Диоптрикой» становятся особенно понятными практические и естественно-научные корни «Геометрии»: вопросы о свойствах конических сечений и способах описания этих кривых (как непрерывным движением, так и по точкам) возникают в «Диоптрике» в связи с задачей изготовления линз, удовлетворяющих тем или иным требованиям, или в связи с конструкцией изобретенного Декартом станка для шлифовки стекол.

Издание сопровождается рядом приложений (стр. 411—654), содержащих: 1) послесловие редактора (411—413); 2) статьи: Ойзерман Т. И., «Философское учение Рене Декарта» (413—457); Слюсарев Г. Г., «Декарт и оптика XVII века» (458—523); Юшкевич А. П., «О «Геометрии» Декарта» (524—559); 3) комментарии и примечания: Г. Г. Слюсарева к «Диоптрике» (стр. 560—585) и к «Метеорам» (585—594); А. П. Юшкевича к «Геометрии» (594—647); 4) список произведений Декарта (648—649); 5) именной указатель.

В статье Т. И. Ойзермана освещению философии Декарта предшествует анализ особенностей первоначального накопления капитала во Франции, которые вполне объясняют, почему буржуазия, развивавшаяся в недрах феодального экономического строя, революционизируя общественное производство, оставалась вместе с тем в течение долгого времени политически консервативной» (стр. 418—419). Этот анализ дает автору возможность сделать заключение, положенное в основу его статьи, что «Декарт, будучи идеологом французской буржуазии этой эпохи, отразил в своей философии всю ее двойственность» (стр. 419). При этом не идеалистические «Метафизические размышления» «образуют главное в учении Декарта, а его метод и учение о природе» (стр. 426).

Статья Г. Г. Слюсарева содержит большой фактический материал историко-биографического характера, относящийся к истории возникновения «Рассуждения о методе» и его приложений, прежде всего «Диоптрики» и «Метеоров», к истории оптики и других наук, в свете которого многое делается понятным в творчестве Декарта. В качестве небольшой иллюстрации приведем следующее объяснение причин, побудивших Декарта заняться диоптрикой: «Несмотря на то, что диоптрика как наука была в зачаточном состоянии, эта наука отличалась именно теми особенностями, которые должны были привлечь внимание Декарта, обладателя нового метода нахождения истины в науках. Прежде всего она легко поддавалась упрощению, ее можно было свести к небольшому числу положений и в дальнейшем развивать как чисто математическую дисциплину. При этом она предоставляла большие возможности для важнейших практических применений, что в высшей степени соблазняло Декарта. В первой главе он предупреждает читателя о том, что имеет в виду мастеровых и поэтому постарается изъясняться просто и понятно; вследствие этого свое произведение он написал на французском, а не на латинском языке, на каком полагалось писать научные книги» (стр. 494).

Статья «О «Геометрии» Декарта» содержит: 1) общую оценку этого произведения с точки зрения его роли в возникновении математики переменных величин, математики как науки о функциональных зависимостях; 2) общий очерк истории аналитической геометрии и алгебры до работ Декарта; 3) характеристику задач общественной практики времен Декарта, требовавших интенсивной разработки математики; 4) основанную на анализе других работ Декарта, прежде всего его переписки, историю возникновения основных идей его «Геометрии»; 5) освещение содержания «Геометрии» и других математических работ Декарта; 6) историю дальнейшего развития предпринятого Декартом дела преобразования математики — прежде всего в трудах Ньютона и Лейбница, критически преодолевших слабые стороны «всеобщей математики» Декарта.

Комментарии и примечания поясняют отдельные места в трактатах. Особенно обстоятельный характер носят примечания к «Геометрии». Здесь поясняется терминология Декарта, история (предшествующая и последующая) рассматриваемых им вопросов, математическое содержание его утверждений. В примечаниях использован огромный фактический материал по истории математики, начиная от античной древности до XIX в. С. А. Яновская

3571 К. Ознаменование Политехнической школой столетия со дня рождения Анри Пуанкаре. Дассо (Commémoration à l'École polytechnique du centenaire de la naissance d'Henri Poincaré. Dassault Paul. 20 p., Paris, imp. de Gauthier-Villars, 1954), Bibliogr. France, 1954, 143, part 1, № 42, 918 (библ.)

3572 Д. Очерки по истории математических наук в Грузии с древних времен до начала XX века. Цхакая Д. Г. Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н. Тбилис. матем. ин-т, Тбилиси, 1954

См. также: 3544, 3886, 3799 К, 4101

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

3573. О непрерывности конструктивных функций. Марков А. А., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 3(61), 226—230

Всякая функция натурального аргумента, представляемая в виде

$$\frac{\varphi(n)-\psi(n)}{1+\chi(n)},$$

где $\varphi(n)$, $\psi(n)$ и $\chi(n)$ — обще-рекурсивные функции, называется вычислимой последовательностью рациональных чисел. Вычислимую последовательность α автор называет регулярно сходящейся последовательностью, если

$$\forall m \forall n (m \leqslant n \supset |\alpha(m)-\alpha(n)| \leqslant 2^{-m}).$$

Для регулярно сходящихся последовательностей определяется отношение эквивалентности. Автор применяет к регулярно сходящимся последовательностям абстракцию отождествления (отождествляются эквивалентные последовательности) и это приводит к понятию вычислимого (или конструктивного) вещественного числа. Вычислимые числа называются также точками. Далее автор вводит понятие вычислимой или конструктивной функции вещественной переменной и определяет предикат «конструктивная функция F имеет конструктивный разрыв в точке X». Основная теорема работы:

Конструктивная функция вещественной переменной не имеет конструктивных разрывов ни в какой точке.

Формулируется ряд следствий этой теоремы. В частности, из основной теоремы вытекает, что невозможна конструктивная функция вещественной переменной, определенная во всех точках отрезка $[A, B]$ и принимающая на этом отрезке ровно два значения.

В связи с доказательствами некоторых других следствий автор выдвигает в качестве логического принципа, приемлемого в рамках конструктивной установки, следующий принцип:

Если P — одноместный рекурсивный предикат и невозможно, чтобы всякое натуральное число удовлетворяло его отрицанию, то существует натуральное число, удовлетворяющее P. Н. А. Шанин

Примечание редакции. Сформулированный принцип для достаточно широкого класса случаев допускает конструктивное, правда, неэлементарное доказательство, которое сразу извлекается из результата П. С. Новикова (Матем. сб., 1943, 12(54), № 2, 258—260, 261).

3574. Замечания о тождестве и описании в системах аксиом первого порядка. Хейлперин (Remarks on identity and description in first-order axiom systems. Hailperin Theodore), J. Symbolic Logic, 1954, 19, № 1, 14—20 (англ.)

Дается уточнение некоторых известных предложений узкого исчисления предикатов с равенством и аксиомами первого порядка («первой ступени», по терминологии, принятой в книге Гильберта Д. и Аккермана В., Основы теоретической логики, М. — Л., 1947, стр. 139—141). Число предикатных символов предполагается конечным.

Если $x = y$ рассматривать как конъюнкцию всех формул вида $(z)(\Phi(z, \widetilde{x}) \equiv \Phi(z, \widetilde{y}))$ ($\widetilde{z}$ — все переменные из $\Phi(z, \widetilde{x})$, отличные от x) по всем аргументным местам всех предикатных символов, то с помощью индукций по длине произвольной формулы $P(x)$ доказывается

Теорема 1. (a) $x = x$,

(b) $x = y . P . \supset Q$,

где P — любая формула системы, а Q получается из P подстановкой свободных вхождений y вместо свободных вхождений x.

В отношении описаний, т. е. символов вида $\imath x P$ (означающих «тот x, для которого P» при условии $(E_1 x) P$ («существует единственный x такой, что P»)) развиваются следующие соображения.

Известно (см. например, Hilbert D., Bernays P., Grundlagen der Mathematik, B. 1, Berlin, 1934, § 8), что если в качестве аксиом для описаний взять

HD (1) $(E_1 x) P \supset . (y) Q \supset Q(\imath x P)$,

(2) $\supset . P(\imath x P)$,

где $Q(\imath x P)$ и $P(\imath x P)$ получаются подстановкой $\imath x P$ вместо всех свободных вхождений y в Q и x в P (с обычными ограничениями для связанных переменных), то в системе S_D, полученной присоединением этих аксиом к данной системе S, класс выводимых формул из S тот же, что и в системе S. Более того, если формулу P из S_D преобразовать к «безиотной форме» P^*, заменяя последовательно все ее элементарные части вида

(A) $\Phi(X_1, \ldots, X_n)$,

где X_i — первое из $X_1, \ldots, X_n$ описание $\imath y Q$ на

(B) $(E x_i)[\Phi(X_1, \ldots, X_{i-1} x_i, \ldots, x_n)(y)(y = x_i \equiv Q)]$,

то (теорема 2, доказанная Россером): из доказуемости P в S_D вытекает доказуемость P^* в S.

Формула P из S называется тождественной в S, если $\mathfrak{A} \supset P$ ($\mathfrak{A}$ — конъюнкция всех аксиом S) — тождественная формула исчисления предикатов с равенством (если в ней предикаты, кроме $=$, рассматривать как переменные). Формула из S_D называется d-тождественной, если ее безиотная форма тождественна в S. Система называется d-полной, если каждая ее d-тождественная формула доказуема. Доказывается

Теорема 3. Если к аксиомам для описаний HD (1) — (2) добавить аксиомы вида

HD (3) $x = \imath y Q \equiv (y)(y = x \equiv Q)$

и дальнейшие аксиомы HD (4) — (m), выражающие эквивалентности таких выражений, как (A) и (B), причем $\imath y Q$ стоит в $\Phi(X_1, \ldots, X_n)$ последовательно на n-м, $(n-1)$-м, ... местах, то полученная система $S_D^{(1)}$ будет d-полна.

При этом для каждого примитивного предиката Φ выражение A ложно, если на некотором аргументном месте стоит $\imath y Q$, где $(E_1 x) Q$ ложна. Можно было бы добиться и истинности таких выражений, если вместо (B) взять

$$(x_i)[(y)(y = x_i \equiv Q) \supset \Phi(X_1, \ldots, X_{i-1}, x_i, \ldots, x_n)]$$

и аналогичные изменения произвести в HD (4) — (m).

В заключение рассматривается система Россера с аксиомами 8 — 11 (РЖМат, 1955, 592) для описаний. Доказывается (теорема 4), что для наличия элиминационной теоремы при таком введении описаний необходимо и достаточно, чтобы для некоторого одноместного предиката $Q_1(x)$ была доказуема формула

$(E_1x)Q_1(x)$. Для этих систем безиотная форма получается заменой частей (A) не вида $x = \imath yQ$ на

(C) $(Ex_i)[\Phi(X_1, \ldots, X_{i-1}, x_i, \ldots, x_n) \cdot x_i = X_i]$,

а частей $x = \imath yQ$ на

(D) $((y)(y = x \equiv Q)) \equiv (E_1y)Q) \vee ((y)(y = x \equiv Q_1)) \cdot \sim$

$\sim (E_1y)Q)$ (Q_1 такое же, как в теореме 4).

Последняя в статье теорема 5 является аналогом теоремы 3 для так определенной безиотной формы и состоит в том, что для d-полноты (в новом смысле) системы с описаниями россеровского типа достаточно добавить только одну аксиому — эквивалентность равенства $x = \imath yQ$ формуле (D). А. С. Есенин-Вольнин

3575. Предикаты в алгебраически замкнутых полях. **Робинсон** (On predicates in algebraically closed fields. Robinson Abraham), J. Symbolic Logic, 1954, 19, № 2, 103—114 (англ.)

Доказывается главная теорема, непосредственно примыкающая к книге автора «О метаматематике алгебры», и 6 вспомогательных теорем.

Основная теорема. Пусть F — коммутативное алгебраическое поле произвольной характеристики и пусть $F' = F[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо полиномов от n переменных с коэффициентами из F. С каждым предикатом $Q(x_1, \ldots, x_n)$, сформулированным в узком исчислении предикатов в терминах отношений равенства, сложения, умножения и, быть может, в терминах некоторых элементов F, может быть связана возрастающая цепочка идеалов из F'

$$J_0 \subseteq J_1 \subseteq \ldots \subseteq J_{2k+1} \qquad (k \geqslant 0)$$

такая, что

$$V_Q = (V_0 - V_1) \cup (V_2 - V_3) \cup \ldots \cup (V_{2k} - V_{2k+1})$$

для каждого алгебраически замкнутого расширения F^* поля F. Здесь $V_0, \ldots, V_{2k+1}$ суть многообразия идеалов $J_0, \ldots, J_{2k+1}$ в координатном пространстве S_n: $(x_1, \ldots, x_n)$ над F^*, а V_Q — множество истинности предиката Q в S_n. Ю. А. Шиханович

3576. Новый подход к логике суждений. Хинтикка (A new approoach to sentential logic. Hintikka K. Jaakko J.), Comment. phys.-math., 1953, 17, № 2, 1—14 (англ.)

Рассматривается исчисление предложений со связками $\sim$ и &. Система элементарных формул $A_1, A_2, A_3, \ldots$ не предполагается счетной.

Формулируются правила истинности:

(N) $\sim K$ истинно в том и только том случае, если K не истинны.

(J) $(K \& L)$ истинно в том и только том случае, если истинны K и L.

В дальнейшем μ означает множество предложений.

Доказываются теоремы:

I. Пусть (a) $\sim\sim K \varepsilon \mu$, или (b) $(K \& L) \varepsilon \mu$, или (c) $\sim (K \& L) \varepsilon \mu$. Тогда μ выполнимо только, если в случае (a) система $\{K\} + \mu$; в случае (b) системы $\{K\} + \mu$ и $\{L\} + \mu$; в случае (c) одна из систем $\{\sim K\} + \mu$ или $\{\sim L\} + \mu$ выполнимы.

II. Если $K \varepsilon \mu$ и $\sim K \varepsilon \mu$ для некоторого K, то μ не выполнимо. Если $K \varepsilon \mu$ и $\sim K \varepsilon \mu$, то μ несовместимо; в противном случае — совместимо. Теорема II выражает противоречивость несовместимых множеств.

Непосредственным расширением системы формул μ называется система формул ν, полученная из μ путем присоединения конечного числа формул K по следующим правилам:

(E.1). $\sim\sim K \varepsilon \mu$, $\widetilde{K} \varepsilon \mu$ ($\widetilde{K} \varepsilon \mu$ есть отрицание $K \varepsilon \mu$);

(E.21). $(K \& L) \varepsilon \mu$, $K \widetilde{\varepsilon} \mu$;

(E.22). $(L \& K) \varepsilon \mu$, $K \widetilde{\varepsilon} \mu$;

(E.31). $\sim (L_1 \& L_2) \varepsilon \mu$, $\sim L_1 \widetilde{\varepsilon} \mu$, $\sim L_2 \widetilde{\varepsilon} \mu$, $K = \sim L_1$;

(E.32). $\sim (L_1 \& L_2) \varepsilon \mu$, $\sim L_1 \widetilde{\varepsilon} \mu$, $\sim L_2 \widetilde{\varepsilon} \mu$, $K = \sim L_2$.

Система формул, не имеющая непосредственных расширений, называется полной.

Для данной системы формул строятся непосредственные расширения. Для последних строятся новые непосредственные расширения и т. д. Указывается, как, рассматривая семейство систем расширений, установить противоречивость системы и выполнимость.

Например, доказывается теорема: Система формул μ выполнена в том и только том случае, если существует полная совместимая система формул ν такая, что $\mu \subseteq \nu$. Т. Л. Майстрова

3577. Условная дизъюнкция как примитивная связка для расширенного исчисления высказываний. Роз (Conditioned disjunction as a primitive connective for the erweiterter Aussagenkalkül. Rose Alan), J. Symbolic Logic, 1953, 18, № 1, 63—65 (англ.)

Чёрч высказал предположение, что в двузначном расширенном исчислении высказываний условная дизъюнкция (имеющая такую же таблицу, как и $(X \& Y) \vee (Z \& \bar{Y})$) вместе с кванторами существования и общности образует полную систему независимых связок (= примитивных; см. РЖМат, 1954, 4322). Пусть $[Y, X_1, \ldots, X_m, Y]$ — условная дизъюнкция, т. е. формула m-значной логики, имеющая такую же таблицу, как и

$$(X_1 \& J_1(Y)) \vee (X_2 \& J_2(Y)) \vee \ldots \vee (X_m \& J_m(Y)).$$

Пусть, далее, формулам $(E\,X)\mathfrak{A}$ и $(X)\mathfrak{A}$ отвечают соответственно функции $\min(f(1), f(2), \ldots, f(m))$ и $\max(f(1), f(2), \ldots, f(m))$, если формуле $\mathfrak{A}$ отвечает функция $f(x)$.

В работе доказывается теорема, частный случай которой ($m = 2$) был высказан в виде предположения Чёрчем.

Теорема. Условная дизъюнкция вместе с кванторами существования и общности образует полную систему независимых связок для m-значного расширенного исчисления высказываний. С. В. Яблонский

3578. Математика, синтаксис и логика. Карри (Mathematics, syntactics and logic. Curry Haskell B.), Mind, 1953, 62, 172—183 (англ.)

Эта статья была представлена Международному конгрессу единства науки (Чикаго, сентябрь 1941 г.); она тесно связана с более ранней статьей автора «Некоторые аспекты проблемы математической строгости» (Bull. Amer. Math. Soc., 1941, 47, 221—241), а также с его работой «Наброски формалистической философии математики» (Outlines of a formalist philosophy of mathematics, North-Holland Publish. Co., Amsterdam, 1951). В определении математики автор опирается на понятие формальной системы; оспаривая мнение Карнапа, он указывает, что формальная система это не то же самое, что синтаксис. В формальной системе имеется лишь один язык, в то время как в синтаксисе их два.

Это замечание ведет к дискуссии о предложениях с псевдообъектами, которая специально затрагивает «Логический синтаксис языка» Карнапа (Carnap R., Logical syntax of language, Harcourt, Brace, New-York, 1937). E. W. Beth.

Перевод из Math. Revs, 1953, **14**, № 10, 936.

3579. **О понятии аксиоматизируемости. Гермес** (Sur le concept d'axiomatisabilité. Hermes H.), Colloques internat. Centre nat. Rech. sci., 1953, 36, 23—26 (франц.)

См. также: 3667, 3687, 4014, 4015, 4016, 4022

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

3580. **О представлении натурального числа как суммы простых, принадлежащих данным прогрессиям, плюс данная квадратичная форма. II. Сингулярный ряд. Цулауф** (Über die Darstellung natürlicher Zahlen als Summen von Primzahlen aus gegebenen Restklassen und Quadraten mit gegebenen Koeffizienten. II. Die singuläre Reihe. Zulauf Achim), J. reine und angew. Math., 1954, **193**, № 1—2, 39—53 (нем.)

Доказывается, что сингулярный ряд, являющийся коэффициентом в главной части числа представлений натурального n в виде

$$n = \sum_{\sigma=1}^{s} p_\sigma + \sum_{\tau=1}^{t} b_\tau g_\tau^2 \qquad (1)$$

(обозначения см. в РЖМат, 1955, 597), для n, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям (см. 7.3 стр. 50 реферируемой работы), больше положительной постоянной, не зависящей от n, при условии $s + t/2 > 2$. Отсюда и из формулы числа представлений n в виде (1) следует, что всякое достаточно большое число n, удовлетворяющее некоторым определенным условиям, представимо в виде (1). В. М. Архангельская

3581. **О представлении натурального числа как суммы простых, принадлежащих данным прогрессиям, плюс данная квадратичная форма. III. Результат для «почти всех» чисел. Цулауф** (Über die Darstellung natürlicher Zahlen als Summen von Primzahlen aus gegebenen Restklassen und Quadraten mit gegebenen Koeffizienten. III. Resultate für «fast alle» Zahlen. Zulauf Achim), J. reine und angew. Math., 1954, **193**, № 1—2, 54—64 (нем.)

Исследуется вопрос о представимости натурального n в виде

$$n = \sum_{\sigma=1}^{s} p_\sigma + \sum_{\tau=1}^{t} b_\tau g_\tau^2, \qquad (1)$$

$$p_\sigma \equiv a_\sigma \pmod{K_\sigma}$$

в случае, когда $s + t/2 = 2$. Тогда (1) сводится к

$$n = p_1 + p_2 \qquad (2)$$

или к

$$n = p_1 + b_1 g_1^2 + b_2 g_2^2. \qquad (3)$$

Доказывается, что «почти все» достаточно большие четные натуральные n, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям (см. (4.1) этой статьи), представимы в виде (2) или (3), т. е. число четных чисел $B(x)$, не превосходящих x и не представимых в виде (2) или (3), удовлетворяет неравенству

$$B(x) \ll x \log^{-A} x,$$

где $A > 0$ — любое. См. также РЖМат, 1955, 597, 3580. В. М. Архангельская

3582. **К вопросу о разбиении чисел на неограниченное число слагаемых. Фрейман Г. А.,** Успехи матем. наук, 1954, **61**, № 3, 222—225

Пусть a_r — монотонно возрастающая положительная функция r. Рассматривается количество $q(N)$ решений в целых числах $n_i \geqslant 0$ неравенства $a_1 n_1 + a_2 n_2 + \ldots + a_r n_r \leqslant N$, и для разностной функции $p(N) = [q(N) - q(N-h)]/h$ при фиксированном h выводятся асимптотические формулы при некоторых условиях, наложенных на a_r. Ставится также задача и выясняется поведение a_r по асимптоте $q(N)$, и даются некоторые теоремы в этом направлении. Указывается связь с вопросами статистической физики.

Ю. В. Линник

3583. **Об эпштейновых дзета-функциях 4-го и 8-го порядков. Эмерслебен** (Über zwei Epsteinsche Zetafunktionen 4. und 8. Ordnung. Emerslebeen Otto), Ber. Mathematiker-Tagung, Berlin, 1953, 233—250 (нем.)

При вычислении внутренней энергии кристаллов используются обобщения римановой дзета-функции, введенные впервые Эпштейном. Рассматриваются следующие функции:

$$^{(p)}Z\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right|(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_p(n)}{n^{s/2}},$$

$$^{(p)}Z\left|\begin{matrix}1\\\frac{1}{2}\\0\end{matrix}\right|(s) =$$

$$= \sum_{k_1,\ldots,k_p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left[\left(k_1-\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(k_p-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{s/2}},$$

$$^{(p)}Z\left|\begin{matrix}0\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{matrix}\right|(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{r_p(n)}{n^{s/2}},$$

где $r_p(n)$ — число представлений n в виде суммы p квадратов целых чисел, а $p = 4, 8$. Указывается, что для приложений в физической химии важно знать численное значение введенных функций при $s = 1$ ($p = 1, 2, 3$). В диссертации автора, опубликованной 30 лет тому назад, дано численное значение $^{(3)}Z\left|\begin{matrix}0\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{matrix}\right|(1) = -1{,}74756\ldots$. В реферируемой статье установлены соотношения

$$^{(4)}Z\left|\begin{matrix}0\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{matrix}\right|(s) = \frac{2^{2-\frac{s}{2}}-1}{2^{1-\frac{s}{2}}+1}\,{}^{(4)}Z\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right|(s),$$

$$^{(8)}Z\left|\begin{matrix}0\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{matrix}\right|(s) = \frac{2^{4-\frac{s}{2}}-1}{2^{4-s}-2^{1-\frac{s}{2}}+1}\,{}^{(8)}Z\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right|(s).$$

С помощью этих соотношений вычисляются значения

$$^{(p)}Z\left|\begin{matrix}0\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{matrix}\right|(p) \quad \text{и} \quad \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\,{}^{(p)}Z\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{matrix}\right|(s)$$

при $p = 4, 8$. И. И. Пятецкий-Шапиро

3584. О непериодичности нулей дзета-функций Римана. Патнам (On the non-periodicity of the zeros of the Riemann zeta-function. Putnam C. R.), Amer. J. Math., 1954, **76**, № 1, 97—99 (англ.)

Теорема. Последовательность положительных нулей $\zeta(1/2+it)$ не содержит никакой периодической подпоследовательности.

Под периодической последовательностью автор подразумевает арифметическую прогрессию вида d, $2d$, $3d$, ... ($d>0$). Доказательство основано на следующем представлении $\zeta(z)$:

$$\zeta(z)=z(z-1)^{-1}-z\int_0^\infty g(x)\,e^{-itx}\,dx,\quad 0<\sigma<1, \tag{1}$$

где $g(x)=(e^x-[e^x])\,e^{-\sigma x}$. Если $z=\sigma+it$ — нуль $\zeta(z)$, то из (1) следует

$$(z-1)^{-1}=\int_0^\infty g(x)\,e^{-itx}\,dx. \tag{2}$$

Далее автор распространяет $g(x)$ как нечетную функцию на всю числовую ось, и составляет функцию $G(x)$, выраженную равномерно сходящимся рядом

$$G(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} g\left(x+\frac{2\pi k}{d}\right).$$

Предположив существование нулей $\zeta(z)$ вида $z=1/2+idn$, $n=1,2,\ldots$, для некоторого $d>0$, автор приходит к противоречию, выраженному в том, что, с одной стороны, коэффициенты Фурье для $G(x)$ в $[0, 2\pi/d]$ имеют порядок $O(n^{-2})$, как это следует из (2), а с другой стороны, автор устанавливает наличие точек разрыва функции $G(x)$. Последнее обстоятельство является следствием алгебраической независимости числа π от логарифмов целых положительных чисел.

В. М. Архангельская

3585. Замечания о периодических последовательностях и дзета-функции Римана. Патнам (Remarks on periodic sequences and the Riemann zeta-function. Putnam C. R.), Amer. J. Math., 1954, **76**, № 4, 828—830 (англ.)

Статья содержит обобщение результата, опубликованного автором ранее (см. реф. 3584). Доказывается следующее: (A). Пусть $d\neq 0$ обозначает фиксированное действительное число и пусть для фиксированного $\sigma>0$ последовательность $t_1, t_2, t_3, \ldots$ такова, что

$$\operatorname{Im}\{\zeta(\sigma+it_n)\}-\operatorname{Im}\{\zeta(\sigma+ind)\}=o(1)\ \text{при}\ n\to\infty. \tag{1}$$

Тогда

$$\limsup|\operatorname{Im}\{\zeta(\sigma+it_n)\}|>0\quad\text{при}\ n\to\infty. \tag{2}$$

(B). Если $t_n=nd+\delta_n$, то соотношение (1) (в силу (A) также и (2)) имеет место для $1/2\leqslant\sigma<1$, если

$$\delta_n=o(n^{-1/(M-2)}\log^{-2}n)\quad\text{при}\ n\to\infty; \tag{3}$$

здесь $M=2^m$, $\sigma=1-m(M-2)^{-1}$, $m\geqslant 3$; для $\sigma=1$ (1) имеет место, если

$$\delta_n=o(\log\log n\cdot\log^{-2}n)\quad\text{при}\ n\to\infty. \tag{4}$$

Из (A) и (B) может быть получено следствие: последовательность нулей $\zeta(1/2+it)$ не содержит никакой «почти периодической» подпоследовательности типа $d+\delta_1$, $2d+\delta_2$, $3d+\delta_3$, ..., где $\delta_n=o(n^{-1/6}\log^{-2}n)$ при $n\to\infty$.

(A) следует из предыдущей упомянутой работы автора; (B) доказывается применением метода Ван-дер-Корпута для оценки суммы $\Sigma_{n\leqslant t}n^{-(\sigma+iT)}\log n$.

В. М. Архангельская

3586. Исследование некоторых вопросов аналитической теории рационального и квадратичного поля. I. II. III. Кошляков Н. С., Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, **18**, № 2, 113—144; № 3, 213—260; № 4, 307—326

Пусть $\zeta_\Omega(s)$ — функция Дедекинда для квадратичного поля Ω; $\sigma(x)$ — функция, связанная с $\zeta_\Omega(s)$ преобразованием Меллина. В работе I получено большое количество тождеств, связывающих между собой указанные функции. Получены также выражения для $\zeta_\Omega(2)$, $\operatorname{Res}_{s=1}\zeta_\Omega(s)$ и других величин для случая, когда поле имеет число классов идеалов $=1$. В работе II получены новые тождества для суммы $\sum_{n=1}^{\infty}F(n)f(n)$, где $F(n)$ — число идеалов поля Ω, имеющих норму $=n$; $f(z)$ — заданная аналитическая функция.

В работе III дается обобщение известных тождеств Рамануджана для рационального поля; автор, например, получает тождество

$$\sqrt{a}\int_0^\infty(\sigma(x)-\pi^{-1}x^{-1})\sin ax\,dx=$$
$$=\sqrt{b}\int_0^\infty(\sigma(x)-\pi^{-1}x^{-1})\sin bx\,dx,$$

где $ab=4\pi^2|\Delta|^{-1}$, Δ — дискриминант Ω. Аналогичные тождества, полученные в работе, содержат функции Бесселя.

Не указаны приложения полученных результатов к арифметике квадратичных полей и к теории самой функции $\zeta_\Omega(s)$.

Примечание референта. Работа содержит ряд существенных дефектов. 1. Вывод функционального уравнения для $\zeta_\Omega(s)$ из формулы (4.1) в работе I представляет собой порочный круг, так как сама формула (4.1) выводится из (3.2), т. е. из самого же функционального уравнения. Аналогичные заключения делаются и в других местах работы; например, вывод функционального уравнения в работе II на стр. 225 тоже представляет собой порочный круг. 2. Тождество (10.2) справедливо только для полей, число классов которых равно единице. Следовательно, все выводы из этого тождества, изложенные на стр. 137—143, справедливы только для таких полей. 3. Автор несколько раз пишет неверное равенство $\zeta_\Omega(0)=-1$ для мнимого поля Ω (истинное значение: $\zeta_\Omega(0)=-h/2$). Равенство (10.28) неверно. На стр. 140—143 допущены описки, сильно затрудняющие понимание текста.

Н. Г. Чудаков

3587. О некоторых асимптотических свойствах последовательностей действительных чисел. Когония П. Г., Тр. Тбилис. ун-та, 1954, **52**, 11—18 (резюме груз.)

Асимптотической плотностью некоторой последовательности натуральных чисел $\{n_k\}=n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ называется

$$\sigma=\underline{\lim}_{N\to\infty}\left(N^{-1}\sum_{k_k\leqslant N}1\right),$$

Последовательность действительных чисел $\{a_k\}$ называется плотной в предельной точке a, если существует хоть одна последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ положительной асимптотической плотности, для которой $\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=a$. Верхняя грань множества асимптотических плотностей всех последовательностей $\{n_k\}$, для которых $\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=a$, называется плотностью последовательности $\{a_k\}$ в предельной точке a.

Теорема. Если последовательность действительных чисел $\{a_k\}$ имеет в предельной точке a плотность σ,

то при $A < a^\sigma$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_1 a_2 \dots a_k}{A^k} = \infty. \qquad (1)$$

Если же $\{a_k\}$ плотна в бесконечности, то (1) имеет место при любом $A > 0$.

Далее вводится определение: последовательность действительных чисел $\{a_k\}$ называется равномерно сходящейся к множеству предельных точек $\{b_i\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon)$ такое, что $\lim_{n\to\infty} a_{k_n^{(i)}} = b_i$, $|a_{k_n^{(i)}} - b_i| < \varepsilon$ при $k_n^{(i)} > N(\varepsilon)$ (i=1, 2, 3, ...), и доказывается, что если $\{a_k\}$ равномерно сходится к счетному замкнутому множеству $\{b_i\}$ предельных точек, то последнее исчерпывает совокупность всех предельных точек $\{a_k\}$. Приводится доказательство еще одной теоремы. Доказательства элементарны.

А. А. Бухштаб

3588. **К разбиению натуральных чисел на непересекающиеся классы.** Салие (Zur Verteilung natürlicher Zahlen auf elementfremde Klassen. Salié Hans), Ber. Verhandl. Sächsisch. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-naturwiss. Kl., 1954, **101**, № 4, 26 S. (нем.)

Обобщается постановка задачи Ван-дер-Вардена (Хинчин А. Я., Три жемчужины теории чисел, ОГИЗ, 1948). Вводятся понятия регулярной системы уравнений σ и двух мер регулярности $s_k = s_k(\sigma)$ и $K = K(\sigma)$.

[1]. Пусть имеется разбиение B_k всех натуральных чисел на k непересекающихся классов, и пусть σ — линейная однородная система m уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$ вида

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, m, \quad n > m, \qquad (1)$$

$a_{\mu\nu}$ — рациональные числа. Если при любом разбиении B_k решение (1) существует и все x_ν принадлежат одному и тому же классу, то система называется «регулярной кратности k». Система σ называется просто «регулярной», если она «регулярна кратности k» для каждого k.

[2]. «Границей регулярности» системы σ называется число $s_k = s_k(\sigma)$, обладающее следующими свойствами: а) при каждом разбиении чисел 1, 2, ..., s_k на k классов существует по меньшей мере один класс, содержащий решение σ; б) существует по меньшей мере одно разбиение чисел 1, 2, ..., $s_k - 1$ на k классов такое, что решение σ не принадлежит ни к одному классу. (Эти особенные разбиения со свойством (б) называются «максимальными разбиениями σ».)

[3]. «Степенью регулярности» σ $K = K(\sigma)$ называется такое число классов разбиения, по отношению к которому σ является «регулярной кратности k», но уже не является «регулярной кратности $k+1$».

Понятия s_k и K вводятся для всех σ. (Для «нерегулярной k-той кратности» системы $s_k = \infty$, для регулярной $K = \infty$.) Радо (Rado R., Math. Z., 1933, **36**, 424—480) выдвинул гипотезу (R): K для нерегулярной системы всегда меньше некоторой границы, зависящей только от числа неизвестных n в системе σ; Радо доказал условную теорему (R_1): Если гипотеза (R) справедлива для $m = 1$, то она справедлива и для всех m. Из (R_1) следует, что вместо системы σ можно рассматривать одно уравнение, что и делает Салие, который доказывает справедливость некоторых фактов для $K(\sigma)$ и $s_k(\sigma)$, не противоречащих (R). Доказываемые теоремы носят характер отдельных частных примеров, которые сводятся к следующим:

(α) Для всех нерегулярных уравнений с $n = 3$, $K = 2$ или 3.

(β) Существует бесчисленное множество уравнений, для которых K имеет следующий порядок роста: $K < Cn \log n$ (C — абсолютная постоянная).

Результаты для s_k носят еще более частный характер. Некоторые из них:

(γ_1) Для $ax + by = z$, $b \leqslant a$, $s_1 = a + b$, $s_2 = b(a+b)^2 + a$.

(γ_2) Для $ax + by = az$, $(a, b) = 1$, $a > b$, $s_k \geqslant a^k$.

(γ_3) Для $ax + by + cz = 0$ $s_4 = \infty$

и т. п. Доказательство приведенных теорем элементарно.

В. М. Архангельская

3589. **Некоторые соотношения между различными типами нормальных чисел.** Хансон (Some relations between various types of normality of numbers. Hanson H. A.), Canad. J. Math., 1954, **6**, № 4, 477—485 (англ.)

Действительное число x, записанное в B-ичной системе счисления, называется согласно Борелю (Borel E., Rend. Circolo mat. Palermo, 1909, **27**, 247) нормальным относительно этой системы, если для любого k каждая из возможных B^k комбинаций из k цифр повторяется в записи x с асимптотической частотой $1/B^k$. Согласно Безиковичу (Besicovitch A. S., Math. Z., 1934, **39**, 146) целое число m, записанное μ цифрами в B-ичной системе счисления (причем цифра единиц наивысшего разряда значащая), называется (k, ε)-нормальным относительно этой системы, если для любой комбинации из k цифр $b_1 b_2 \dots b_k$

$$\left| \frac{N(b_1 b_2 \dots b_k)}{\mu - k + 1} - \frac{1}{B^k} \right| < \varepsilon,$$

где $N(b_1 b_2 \dots b_k)$ — число повторений комбинации $b_1 b_2 \dots b_k$ в записи m.

Автор вводит еще понятие квазинормального числа, называя действительное число x, записанное в B-ичной системе счисления, квазинормальным относительно этой системы, если среди цифр, номера мест которых в записи x образуют какую-либо арифметическую прогрессию, любая цифра b, $0 \leqslant b < B$, повторяется всегда с асимптотической частотой $1/B$. Основные результаты статьи следующие.

1. Пусть дана возрастающая последовательность целых положительных чисел $\{a_n\}$; а) если для всякого $\varepsilon > 0$ почти все a_n являются $(1, \varepsilon)$-нормальными относительно любой системы счисления, то для любых ε и k почти все a_n (k, ε)-нормальны относительно всякой системы счисления; б) пусть ν_i — число цифр в записи a_i в B-ичной системе счисления; если для любых $\varepsilon > 0$ и k почти все a_n являются (k, ε)-нормальными относительно этой системы счисления и $n\nu_n = O\left(\sum_{i=1}^{n} \nu_i\right)$, то число $0, a_1 a_2 a_3 \dots$ нормально относительно той же системы.

2. Каждое нормальное число квазинормально относительно одной и той же системы счисления. Строится пример квазинормального числа, не являющегося нормальным. Пусть x нормально относительно B-ичной системы счисления; $s > 1$ — целое, r_j — наименьший неотрицательный вычет числа $[B^j x]$ по модулю s; $y = 0, r_1 r_2 r_3 \dots$ Тогда y квазинормально относительно s-ичной системы счисления, однако нормальным оно является тогда и только тогда, когда $s \nmid B$.

И. П. Кубилюс

3590. О сетях Фарея n измерений. Мёнкемейер (Über Fareynetze in n Dimensionen. Mönkemeyer Rudolf), Math. Nachr., 1954, **11**, № 6, 321—344 (нем.)

А. Гурвиц (Hurwitz A., Math. Ann., 1891, 39, 279—284) предложил перенести для совместной аппроксимации систем вещественных чисел рациональными метод Фарея разбиения отрезка на многомерный случай. Аналогичное предложение выдвигал Бахман (Bachmann P., Encykl. Math. Wiss., 1900, 1, Teil 2, C1, № 3). Реферируемая статья посвящена реализации указанных предложений. Аналогом рациональной дроби является точка n-мерного пространства с $n+1$ целыми однородными координатами. Если координаты точки $A=(a_1\ a_2, \ldots, a_{n+1})$ нормированы так, что общий наибольший делитель координат равен единице, то a_{n+1} называется знаменателем точки A. Автор называет точку узловой точкой сети Фарея $F_{n,m}$, если ее знаменатель не превосходит заданного числа m. Вводятся в рассмотрение симплексы, образованные $n+1$ точками n-мерного пространства с целыми однородными координатами, и соответствующие им матрицы

$$S(A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}) = \left\| \begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} \cdots a_{1,n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} \cdots a_{n+1,n+1} \end{matrix} \right\|.$$

Если все вершины собственного симплекса принадлежат сети Фарея $F_{n,m}$, то симплекс называется симплексом Фарея. Четыре дополнительных требования определяют так называемый H-симплекс Фарея.

Автор применяет развитые им построения к выводу известной теоремы Гурвица об аппроксимации и доказывает следующее предложение, являющееся, в известном смысле, двумерным аналогом теоремы Гурвица: Для любых вещественных y_1, y_2 неравенство

$$\left|\left(y_1-\frac{a}{c}\right)\left(y_2-\frac{e}{f}\right)-\left(y_1-\frac{d}{f}\right)\left(y_2-\frac{b}{c}\right)\right| < \frac{1}{Kc^{3/2}f^{3/2}}$$

имеет бесчисленное множество решений в целых a, b, c, d, e, f. Константа K имеет значение $3\sqrt[3]{1+1/4\,u}$, $u^3-u-1=0$. Вопрос о возможности улучшения константы K остается нерешенным. Н. П. Романов

3591. Свойства периодичности возвратных последовательностей. II. Дюпарк (Periodicity properties of recurring sequences. II. Duparc H. J. A.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, **A57**, № 4, 473—485 (англ.)

Пусть возвратная последовательность определяется формулой $w_{n+N}=\sum_{h=1}^{N} a_h w_{n+N-h}$. Периодом последовательности по $\bmod m$ по отношению к U называется натуральное число d такое, что $w_{n+d} \equiv u w_n \pmod m$ для $n \geqslant n_m$, где u — некоторый элемент данного U-множества (РЖМат, 1955, 2548). Доказывается, что любой период делится на наименьший период.

Далее используется характеристический многочлен последовательности, определяемый формулой $f(x)=x^N-\sum_{h=1}^{N} a_h x^{N-h}$, и рассматриваются сравнения по $(\bmod f(x), m)$. Из различных U-множеств главное внимание уделено следующим двум: 1) множеству, состоящему из одного единичного элемента; 2) множеству приводимых классов по $\bmod m$. Доказан ряд теорем о периодах различных возвратных последовательностей по отношению к этим множествам. Однако в большинстве случаев нельзя утверждать, что найденный период является наименьшим. Пример одной из таких теорем: Пусть $f(x)=x^2-a_1x+a$, $p \nmid a$, $(a/p)=1$, $D=a_1^2-4a$, $p \neq 2$. Тогда по отношению ко второму из вышеупомянутых множеств периодом является $(p-1)/2$, если $(D/p)=1$, и $(p+1)/2$, если $(D/p)=-1$.

В. Д. Подсыпанин

3592. Максимальные простые делители рекуррентных последовательностей. Уорд (The maximal prime divisors of linear recurrences. Ward Morgan), Canad. J. Math., 1954, **6**, № 4, 455—462 (англ.)

Пусть

$$W_0, W_1, \ldots, W_n, \ldots \qquad (W)$$

— последовательность, удовлетворяющая рекуррентному уравнению $\Omega_{n+r}=P_1\Omega_{n+r-1}+P_2\Omega_{n+r-2}+\cdots+P_r\Omega_n$, где $r \geqslant 2$, а $P_1, P_2, \ldots, P_r \neq 0$ и начальные члены $W_0, W_1, \ldots, W_{r-1}$ — целые числа. Натуральное число m называется делителем (W), если на m делится какой-нибудь член W_k, $k>0$, и нуль-делителем, если существует такое k, что при всяком $n \geqslant k$ m делит W_n (Ward M., Duke Math. J., 1936, 2, 472—476). Если в (W) можно указать s и не более последовательных членов $W_k, W_{k+1}, \ldots, W_{k+s-1}$, делящихся на простое число p, то p называется простым делителем (W) порядка s. В том случае, когда простой делитель (W) имеет наибольший возможный порядок, т. е. когда $s=r-1$, его называют максимальным.

Предполагая, что характеристический полином $f(z)=z^r-P_1z^{r-1}-\cdots-P_r$ не имеет кратных корней, автор сформулировал и доказал необходимое условие, при котором P может быть максимальным делителем (W). В случае, когда $r=2$, все простые делители (W), не являющиеся нуль-делителями, оказываются максимальными, и необходимое условие автора становится и достаточным. В этом случае оно совпадает с критерием Холла (Hall M., Bull. Amer. Math. Soc., 1937, **43**, 78—80). При $r>2$ необходимое условие будет достаточным, лишь при выполнении дополнительных требований: 1) полином $f(z)$ нечетной степени и неприводим; 2) числа $p-1$ и $r-1$ взаимно простые; 3) полином $f(z)$ неприводим по $\bmod p$. Доказательства неэлементарны, используется теория идеалов. И. Г. Мельников

3593. Диофантово уравнение $ax^3+by^3+cz^3=0$. Завершение таблиц. Сельмер (The Diophantine equation $ax^3+by^3+cz^3=0$. Completion of the tables. Selmer Ernst S.), Acta math., 1954, № 92, 191—197 (англ.)

В одной из прежних работ (Acta math., 1951, 85, 203—362) автор составил таблицу основных решений в целых числах уравнения $ax^3+by^3=Az^3$ для $A \leqslant 500$, а также несколько вспомогательных таблиц, объясняющих составление указанной таблицы. Основой для составления таблицы был метод оценки числа основных решений уравнения $x^3+y^3=Az^3$, предложенный для A простого Д. К. Фаддеевым во второй части работы (Тр. Физ.-матем. ин-та АН СССР, 1934, 5, 25—40) и обобщенный автором на случай A составного. Однако при составлении таблицы автор не смог найти решений или убедиться в их отсутствии для $A=283$, 337, 382, 409, 445, 473 и 499. В настоящей работе уравнения при указанных значениях A решены. Найдено также решение уравнения для $A=346$, которое раньше ошибочно считалось не имеющим решений. Дополнены и вспомогательные таблицы. Для решения этих пропущенных уравнений автор или пользуется старым методом, но с применением вычислительных машин, или же несколько видоизменяет его, преобразуя уравнения к нормальной форме Вейерштрасса. В. Д. Подсыпанин

3594. О группах классов вычетов по идеалам полиномиальных вычетов. Нёбауэр (Über Gruppen von

Restklassen nach Restpolynomidealen. Nöbauer Wilfried), Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1953, Abt. 2a, **162**, № 5—7, 207—233 (нем.)

Рассматриваются многочлены над кольцом целых рациональных чисел Г. Многочлен $g(x)$, удовлетворяющий для всех целых l условию $g(l) \equiv 0 \pmod n$, называется полиномиальным вычетом (mod n). Множество всех полиномиальных вычетов (mod n) составляет идеал A кольца $\Gamma[x]$. Если все классы вычетов (mod n) представляются значениями многочлена $g(x)$ при $x = 1, 2, \ldots, n$, то говорят, что $g(x)$ порождает полную систему вычетов (mod n). Классы фактор-кольца $\Gamma[x]/A$, которые состоят из многочленов, порождающих полную систему вычетов (mod n), образуют группу $\mathfrak{G}_n$ относительно операции «подстановки» (т. е. замены аргумента x многочлена $f(x)$ многочленом $h(x)$).

Основная цель работы — определить число $\Delta_n(s)$ всех классов (элементов) группы $\mathfrak{G}_n$, степени которых не превосходят заданного числа s (степень класса $F \in \mathfrak{G}_n$ определяется наименьшей степенью многочленов, содержащихся в F). В ряде теорем, основанных на соображениях элементарной теории чисел и теории групп, выясняются свойства групп $\mathfrak{G}_n$ и чисел $\Delta_n(s)$, устанавливаются условия, определяющие полиномиальные вычеты (mod n) и многочлены, порождающие полную систему вычетов (mod n) (леммы 2—8). Доказывается, что если $n = ab$, $(a, b) = 1$, то группа $\mathfrak{G}_n$ представляется как прямое произведение групп, изоморфных $\mathfrak{G}_a$ и $\mathfrak{G}_b$ (теорема III); $\Delta_{ab}(s) = \Delta_a(s)\Delta_b(s)$ (теорема IV). Последнее обстоятельство позволяет свести $\Delta_n(s)$ к $\Delta_{p^e}(s)$, где p — простое число. Дается законченное выражение для $\Delta_p(3)$ (теорема VII):

$$\Delta_p(3) = \begin{cases} p(p-1), & \text{если } p \text{ — простое число вида } 6n+1, \\ p(p^2-1), & \text{если } p \text{ — простое число вида } 6n-1. \end{cases}$$

Далее устанавливается, что группы $\mathfrak{G}_{p^e}$ и $\mathfrak{G}_{p^{e+k}}$ гомоморфны между собой при любом натуральном $k \geqslant 0$, $e \geqslant 1$ (теорема VIII); при $e > 2$, $s \leqslant r$ (r — однозначно определяемое натуральное число) имеет место $\Delta_{p^e}(s) = p^{s+1}\Delta_{p^{e-1}}(s)$ (теорема X). Случай $n = p^2$ рассматривается особо. Для вычисления $\Delta_{p^2}(s)$ указываются рекуррентные формулы (теоремы XII — XIV).

Б. М. Уразбаев

3595. Соотношения для числа классов квадратичных форм над $GF[q,x]$. Байерс (Class number relations for quadratic forms over $GF[q,x]$. Byers G. Cleaves), Duke Math. J., 1954, **21**, № 3, 445—461 (англ.)

Пусть p — нечетное простое число, $q = p^n$, $GF(q)$ — поле Галуа порядка q и $GF[q, x]$ — кольцо многочленов от x с коэффициентами из $GF(q)$. Для бинарных квадратичных форм с коэффициентами из $GF(q,x)$ строится аналог гауссовой теории определенных бинарных квадратичных форм. С помощью рассмотрения билинейных форм от четырех переменных с коэффициентами из $GF[q, x]$ доказываются три соотношения для числа классов определенных бинарных квадратичных форм $h(\Delta)$, $\Delta \in GF[q, x]$, аналогичные известным формулам Кронекера (Kronecker L., Werke, B. 2, Leipzig, 1897, 427—495). Приведем одно из этих соотношений: Пусть $\nabla \in GF[q, x]$ и имеет степень $2m+1$, тогда

$$\sum_{\text{степ. } R \leqslant m} h(R^2 - \nabla) = 2 \sum'_{K/\nabla,\ k > m} q^k.$$

Сумма слева распространена на все многочлены $R \in GF[q, x]$, степени которых $\leqslant m$, а сумма справа — на все многочлены K степени $k > m$, имеющие старший коэффициент 1 и делящие ∇. А. А. Киселев

3596. О мультипликативных полугруппах классов вычетов. Паркер (On multiplicative semigroups of residue classes. Parker E. T.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 4, 612—616 (англ.)

Рассматриваются конечные коммутативные полугруппы, которые допускают изоморфное представление через числовые полугруппы, элементами которых являются классы вычетов (mod n), где n — натуральное число. Пусть m — произвольное натуральное число, p^h — любая степень простого числа p. Базисной полугруппой $\sigma(p^h, m)$ автор называет полугруппу, составленную из двух образующих x и y, удовлетворяющих всякий раз соотношению $x^r y^s = x^u y^v$, как только $0 \leqslant s = v < m$, $r \equiv u \pmod{p^h}$ или $s \geqslant m$, $v \geqslant m$.

Доказывается теорема: Необходимым и достаточным условием того, чтобы конечная коммутативная полугруппа S допускала изоморфное представление через подполугруппу мультипликативной полугруппы классов вычетов (mod n), состоит в том, чтобы S была изоморфна подполугруппе полугруппы, являющейся прямым произведением конечного числа базисных полугрупп. Доказательство проводится средствами элементарной теории чисел. Б. М. Уразбаев

3597. О дискриминантах бинарных квадратических форм с единственным классом в каждом роде. Човла, Бригс (On discriminants of binary quadratic forms with a single class in each genus. Chowla S., Briggs W. E.), Canad. J. Math., 1954, **6**, № 4, 463—470 (англ.)

Рассматриваются классы положительных примитивных квадратических форм $ax^2 + bxy + cy^2$ с дискриминантом $-\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Посредством $L_k(s)$ обозначается L-функция Дирихле с действительным характером по модулю k. Доказываются две теоремы:

1. Если $\Delta > 10^{60}$, то существует не более одного фундаментального дискриминанта $-\Delta$ с единственным классом в каждом роде.

2. Если $L_k(53/54) \geqslant 0$ для $k > 10^{14}$, то при $\Delta > 10^{14}$ не существует фундаментального дискриминанта $-\Delta$ с одним классом в каждом роде.

Доказательства теорем основываются на тех же идеях, что и аналитическое доказательство теоремы Зигеля о числе классов. Используется еще то, что число родов квадратичных форм $\leqslant 2^t < \Delta^{1/2-\varepsilon}$ при достаточно большом Δ. Здесь t есть число различных простых делителей Δ.

Примечание референта. В лемме 4 имеется опечатка: напечатано $k^{1/27}$ вместо $k^{-1/27}$.

К. А. Родосский

3598. О соотношении между числами классов идеалов подполей бициклического биквадратичного числового поля. Кубота (Über die Beziehung der Klassenzahlen der Unterkörper des bizyklischen biquadratischen Zahlkörpers. Kubota Tomio), Nagoya Math. J., 1953, **6**, Oct., 119—127 (нем.)

Пусть K — нормальное поле алгебраических чисел с четверной группой Галуа; k_0, k_1, k_2 — квадратичные подполя K; h, h_0, h_1, h_2 — числа классов идеалов полей K, k_0, k_1, k_2 соответственно; Q — индекс в группе всех единиц поля K подгруппы, порожденной единицами полей k_0, k_1, k_2. Положим $a = 2$, если K вещественно, и $a = 1$ — в противном случае.

Используя теорию полей классов, автор доказывает простыми средствами следующее известное соотношение: $h = 2^{-a} Q h_0 h_1 h_2$, которое ранее было установлено с помощью ζ-функции Дедекинда. З. И. Боревич

3599. О необычном явлении в некоторых квадратичных расширениях. Манн (On an exceptional

phenomenon in certain quadratic extensions. Mann H. B.), Canad. J. Math., 1954, **6**, № 4, 474—476 (англ.)

Устанавливается следующий факт. Чтобы в циклическом (сепарабельном) расширении Ω поля Σ простой степени p существовал элемент ω такой, что $\omega^{p^m} \in \Sigma$, $\omega^{p^{m-1}} \notin \Sigma$, $m \geqslant 2$, необходимо и достаточно, чтобы 1) $p = 2$, 2) $\Omega = \Sigma(\sqrt{-1})$, 3) $\theta + \theta^{-1} \in \Sigma$, где θ — первообразный корень степени 2^m из 1. Если Ω есть алгебраическое (конечное) числовое поле, то среди чисел ω с указанным выше свойством существуют единицы поля Ω тогда и только тогда, если идеал (2) в поле Σ есть 2^{m-1}-я степень главного идеала. З. И. Боревич

3600. Число решений некоторых уравнений в конечном поле. Карлиц (The number of solutions of some special equations in a finite field. Carlitz L.), Pacif. J. Math., 1954, **4**, № 2, 207—217 (англ.)

Пусть $GF(q)$ — данное конечное поле; $f(x) = f(x_1, \ldots, x_r)$ — многочлен с коэффициентами из этого поля. $N_f(\alpha)$ — число решений уравнения $f(\xi_1, \ldots, \xi_r) = \alpha$, $\xi_i, \alpha \in GF(q)$ $(i = 1, \ldots, r)$. Рассматриваются различные частные примеры многочлена $f(x)$ и подсчитывается величина $N_f(\alpha)$. Наиболее интересными, с точки зрения автора, являются те случаи, когда $N_f(\alpha)$ не зависит от величины α.

1. Пусть q нечетно; $f(x) = P(x)$ — «пфаффиан», т. е. особый тип многочленов степени r $(2r-1)$ (r — натуральное), которые определяются некоторым реккурентным соотношением; в этом случае

$$N_P(\alpha) = q^{r(r-1)} \prod_{i=2}^{r} (q^{2i-1} - 1), \text{ если } \alpha \neq 0;$$

$$N_P(0) = q^{r(2r-1)} - q^{r(r-1)} \prod_{i=1}^{r} (q^{2i-1} - 1).$$

2. К первому случаю приводится и решение уравнения $S(x) = \alpha$, где $S(x)$ — любой кососимметричный определитель переменных $x_1, \ldots, x_{2r}$.

3. Далее рассматривается уравнение $h(x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}) = \alpha_1 f(x^{(1)}) + \alpha_2 f(x^{(2)}) + \cdots + \alpha_s f(x^{(s)})$, где многочлен $f(x)$ таков, что $N_f(\alpha) = A + k(\alpha) B$, а $k(\alpha) = -1$ для $\alpha \neq 0$ и $k(\alpha) = q - 1$ для $\alpha = 0$. Тогда

$$N_h(\alpha) = q^{s-1}(A^s + k(\alpha) B^s). \qquad (1)$$

4. Тождество (1) применяется для таких однородных и неприводимых многочленов $F(x) = F(x_1, \ldots, x_r)$, которые полностью распадаются на линейные множители в $GF(q^r)$, так как для них $N_F(\alpha) = q^{r-1} - (q^{r-1} - 1)(q-1)^{-1} k(\alpha)$. Н. Г. Чудаков

3601. Уравнения в конечных полях. Анкень (Equations in finite fields. Ankeny N. C.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, **40**, № 11, 1072—1073 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$a_0 x_0^{m_0} + a_1 x_1^{m_1} + \cdots + a_r x_r^{m_r} = 0 \qquad (1)$$

в конечном поле. Пусть поле состоит из простого числа p элементов. Для поля вычетов по $(\mathrm{mod}\ p)$ доказывается: Если $N(a_0, a_1, \ldots, a_r, m_0, \ldots, m_r, p) = N(p)$ — число решений уравнения (1), то найдется такое число A, зависящее только от $m_0, m_1, \ldots, m_r$ (делители $p-1$), что

$$N(p) = p^r + A\theta_p p^{(r+1)/2},$$

где $|\theta_p| < 1$ для всех простых p, и $\overline{\lim}_{p \to \infty} |\theta_p| = 1$.

Дается и другой путь оценки числа решений (1). Даны указания на возможность обобщения результатов на поля с p^ν элементами. П. Н. Реморов

3602. Обобщение формулы взаимности для дедекиндовых сумм. Радемахер (Generalization of the reciprocity formula for Dedekind sums. Rademacher Hans), Duke Math. J., 1954, **21**, № 3, 391—397 (англ.)

Для дедекиндовой суммы

$$S(b, a) = \sum_{\mu \bmod a} ((\mu / a))((b\mu / a)), \quad (a, b) = 1,$$

где

$$((x)) = \begin{cases} x - [x] - \frac{1}{2} & \text{для } x \text{ нецелого,} \\ 0 & \text{для } x \text{ целого,} \end{cases}$$

сравнительно простыми средствами устанавливается соотношение, из которого в специальном случае получается известная формула взаимности (Dedekind R., Gesammelte Math. Werke, 1930, **1**, 159—172). Именно, если a, b, c — натуральные попарно простые числа и a', b', c' — такие целые числа, что $aa' \equiv 1 (\mathrm{mod}\ bc)$, $bb' \equiv 1 (\mathrm{mod}\ ca)$, $cc' \equiv 1 (\mathrm{mod}\ ab)$, то

$$S(bc', a) + S(ca', b) + S(ab', c) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}\right).$$

Формула взаимности получается из этого соотношения при $c = c' = 1$. Аналогичные обобщения закона взаимности дедекиндовых сумм были получены ранее Морделлом (Mordell L. J., J. Indian Math. Soc., 1951, **15**, 41—46) и другими авторами посредством более сложных методов. И. Г. Мельников

3603. Замечание об обобщенных суммах Дедекинда. Карлиц (A note on generalized Dedekind sums. Carlitz L.), Duke Math. J., 1954, **21**, № 3, 399—403 (англ.)

Рассмотрена обобщенная сумма Дедекинда

$$s_n(h_1, \ldots, h_n; k) = \sum_{r_1, \ldots, r_n (\mathrm{mod}\ k)} f\left(\frac{r_1}{k}\right) \cdots f\left(\frac{r_n}{k}\right) f\left(\frac{r_1 h_1 + \cdots + r_n h_n}{k}\right),$$

где $h_1, \ldots, h_n$, k — целые числа и

$$f\left(\frac{r}{k}\right) = \frac{r}{k} - \left[\frac{r}{k}\right] - \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}.$$

Для нее получены две формулы:
(1) если $n \geqslant 2$, $k_1, \ldots, k_n$ — попарно взаимно простые положительные целые числа, то

$$\sum_{C_n} k_n^{n-2} s_{n-1}(k_1, \ldots, k_{n-1}; k_n) = Z_n^{(n)} / n!;$$

(2) если $n \geqslant 3$, $k_1, \ldots, k_n$ — попарно взаимно простые положительные целые числа, $k_i k_i' \equiv -1 (\mathrm{mod}\ k_1 \cdots k_{i-1} k_{i+1} \cdots k_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то

$$\sum_{C_n} k_n^{n-3} s_{n-2}(k_1 k_{n-1}', \ldots, k_{n-2} k_{n+1}'; k_n) = \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{n-r-1} \frac{Z_r^{(n)}}{r!} + (-1)^{n-1}\left(-1 + \frac{1}{k_1 \cdots k_n}\right),$$

здесь суммирование слева $\sum C_n$ распространяется по всем

циклическим перестановкам $k_1, \ldots, k_n$;

$$Z_{m+1}^{(n)} = (m+1)\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}B_{m-r}^{(m+1)}W_r^{(n)},$$

причем $W_r^{(n)}$ и $B_r^{(n)}$ определяются из разложений по z:

$$\frac{(e^z-1)^n}{\prod_{i=1}^{n}(e^{k_i z}-1)} = \sum_{r=0}^{\infty} W_r^{(n)}\frac{z^r}{r!},$$

$$\log^r(1+z) = r\sum_{s=0}^{\infty}\frac{z^{r+s}}{s!}\frac{B_s^{(r+s)}}{r+s}.$$

Первая формула является обобщением закона взаимности для обычных сумм Дедекинда (Rademacher H., Whiteman A., Amer. J. Math., 1941, 63, 377—407), вторая — обобщением трехчленной формулы Радемахера (см. реф. 3602). А. В. Малышев

3604. **Одно предложение о множестве простых чисел. Хорнфек** (Ein Satz über die Primzahlmenge. Hornfeck Bernhard), Math. Z., 1954, 60, № 3, 271—273 (нем.)

Согласно Остманну (Ostmann H., Math. Ann., 1948, 120, 165—196), множество целых неотрицательных чисел называется неприводимым, если оно не может быть представлено как сумма Шнирельмана (Schnirelmann, Math. Ann.,1933, 107, 649—690) двух множеств, содержащих не менее двух элементов. Вирзинг (РЖМат, 1955, 43) называет множество $\mathfrak{M}$ полностью неприводимым, если неприводимо всякое множество, совпадающее, начиная с некоторого места, с $\mathfrak{M}$. Вирзинг доказывает, что почти все множества полностью неприводимы. Доказывается теорема: множество всех простых чисел полностью неприводимо. Н. П. Романов

3605. **Суммы Дедекинда и ряды Ламберта. Карлиц** (Dedekind sums and Lambert series. Carlitz L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 4, 580—584 (англ.)

Приводится элементарное доказательство формулы

$$f(h,k;\tau) = \tau^{p-1}f\left(-k,h;-\frac{1}{\tau}\right) + \frac{1}{\tau}\sum_{s=0}^{p+1}C_{p+1}^{s}B_{p+1-s}B_s\tau^s,$$

где p — нечетное число, $(h,k)=1$, B_s — числа Бернулли,

$$f(h,k;\tau) = \sum_{s=0}^{p+1}C_{p+1}^{s}(k\tau-h)^{p-s}c_s(h,k),$$

$$c_s(h,k) = \sum_{\mu\,(\mathrm{mod}\,k)}\overline{B}_{p+1-s}\left(\frac{\mu}{k}\right)\overline{B}_s\left(\frac{h\mu}{k}\right)\quad(0\leqslant s\leqslant p+1),$$

$\overline{B}_s(x)$ — функция Бернулли (т. е. $\overline{B}_s(x)$ совпадает с многочленом Бернулли на интервале $(0,1)$ и $\overline{B}_s(x+1) = \overline{B}_s(x)$), а суммирование ведется по полной системе вычетов по модулю k. Н. И. Фельдман

3606. **Об арифметической функции Штернека. Никол, Вандивер** (A von Sterneck arithmetical function and restricted partitions with respect to a modulus. Nicol C. A., Vandiver H. S.), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1954, 40, № 9, 825—835 (англ.)

В 1902 г. Штернек (Sterneck, Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien. Math.-naturwiss. Kl., 1902, 111, 1567—1601) впервые рассмотрел арифметическую функцию $\Phi(k,n)$. Авторы предлагают называть эту функцию «функцией Штернека». Функция имеет следующий вид:

$$\Phi(k,n) = \frac{\varphi(n)}{\varphi(n\ \ (k,n))}\,\mu\,\frac{n}{(k,n)},$$

$\varphi(n)$ — функция Эйлера, μ — функция Мёбиуса, (k,n) — общий наибольший делитель чисел k и n. Дается краткий обзор основных результатов работ других авторов, (библиография 15 названий) в связи с функцией Штернека. Дается ряд соотношений, связывающих функцию Штернека с корнями из единиц. П. Н. Реморов

3607. **Замечательные тождества, связанные с правильными многоугольниками. Финаулст** (Merkwaardige identiteiten in verband met gegelmatige veelhoeken. Finoulst J.), Simon Stevin, 1954, 30, № 2, 79—89 (голл.; резюме франц.)

Отношение стороны или диагонали правильного n-угольника к радиусу описанного круга равно $2\sin p\pi/n$, где $0<p<n$. Это число обозначено (n,p) и названо имеющим порядок n, если n и p — взаимно простые числа. Из очевидного тождества $(n,p) = (n,n-p)$ вытекает, что число различных чисел (n,p) порядка n равно $\frac{1}{2}\varphi(n)$.

Вычисляется произведение и сумма квадратов всех различных чисел (n,p) порядка n.

$$\Pi_p(n,p) = \sqrt{q},\ \text{если } n = q^m\ (q\ \text{— простое число}),\quad (1)$$

$$\Pi_p(n,p) = 1,\ \text{если } n \neq q^m.$$

Равенства (1) основаны на полученном в работе тождестве $\Pi_{\lambda=0}^{k-1}(kn,\lambda n+p) = (n,p)$. Далее

$$\sum_p(n,p)^2 = \varphi(n) + (-1)^{m+1},$$

если $n = p_1p_2\cdots p_m$,

p_i — различные простые числа; (2)

$$\sum_p(n,p)^2 = \varphi(n)\ \text{— в остальных случаях.}$$

Равенства (2) выводятся из тождества

$$\sum_{\lambda=0}^{k-1}(kn,\lambda n+p)^2 = 2k.$$

В. Д. Подсыпанин

3608. **Произведения, повторяющие цифры множителей. Терри** (Products repeating integers of factors. Terry George S.), Duodecimal Bull., 1954, 10, № 1, 15—17 (англ.)

Рассматривается, при каких условиях произведение ab записывается при помощи цифр чисел a и b. Приводится ряд примеров таких произведений по десятичной и двенадцатиричной системе счисления.

В. Д. Подсыпанин

3609. **Замечание относительно коэффициентов $(r^{p-1}-1)/p$. Никол** (A note concerning the quotient $(r^{p-1}-1)/p$. Nicol C. A.), Amer. Math. Monthly, 1954, 61, № 8, 562—563 (англ.)

Пусть p — простое целое рациональное число, $r \not\equiv 0 \pmod p$. Выражение $q(r) = (r^{p-1}-1)/p$ называется «коэффициентом Ферма». Сравнения $q(r) \equiv 0 \pmod p$ играют важную роль в вопросе разрешимости уравнения Ферма, а также служат признаком существования в некоторых круговых полях единиц, являющихся p степенями единиц того же поля. Даются два элементарных выражения для $q(r)$, когда r — примитивный корень по mod p. П. Н. Реморов

3610. **О показателях модуля 2^α $(\alpha\geqslant 3)$. Чжан Юань-да** (關於模 2^α $(\alpha\geqslant 3)$ 之指數的一個問題. 張遠達), 新科學 (Синь кэсюэ), 1954, № 3, 13—15 (кит.)

Обычно для получения приведенной системы вычетов по модулю 2^α $(\alpha\geqslant 3)$ заставляют показатели α и β в вы-

ражении $(-1)^{\alpha}5^{\beta}$ пробегать независимо друг от друга полные системы вычетов соответственно по модулю 2 и $2^{\alpha-2}$. Автор предлагает число 5 заменить числом 3 и указывает, что при этом показатели α и β в выражении $(-1)^{\alpha}3^{\beta}$ находятся в простой зависимости между собой. Г. В. Емельянов

3611. Дроби, равные произведению своих цифр. Роберт (Fractions with equal numeral products. Robert Harry C., Jr.), Duodecimal Bull., 1954, **10**, № 1, 19—24, — Tabl 2 (англ.)

Пусть числитель и знаменатель дроби, записанные по системе счисления с основанием B, представляют двузначные числа и пусть дробь не меняется от замены числителя и знаменателя на произведение своих цифр. Описываются способы нахождения таких дробей и приведен ряд примеров по различным системам счисления. В. Д. Подсыпанин

3612. Обратимые кратные (Conversion multiples), Duodecimal Bull., 1954, **10**, № 1, 18 (англ.)

Если некоторое число, записанное по двенадцатиричной системе счисления, делится на число, имеющее такую же запись, но по десятичной системе счисления, то оно называется обратимым кратным. Приведен ряд примеров таких чисел. В. Д. Подсыпанин

3613. Теоретико-числовая логарифмическая «счетная палочка». К теореме Мёснера. Паше (Ein zahlentheoretischlogarithmischer «Rechenstab». Zum Satz von Moessner. Paasche I.), Math. Naturwiss. Unterricht, 1953, **6**, 26—28 (англ.)

Теорема Мёснера была установлена им без доказательства (Sitzungsber. Math.-naturwiss. Kl. Bayer. Akad. Wiss., 1951, 29 (1952)) и впервые доказана Перроном (Perron, там же, 1951, 31—34 (1952)). Другие доказательства были даны Г. Салье (Salié H., там же, 1952, 7—11 (1953)) и автором этой заметки (там же, 1952, 1—5 (1953)). В реферируемой заметке автор комментирует эти доказательства и дает различные виды теоремы в тех случаях, когда она обобщается на произвольные начальные последовательности чисел и далее обобщается так, что включает более общую схему с вычеркиванием чисел, предваряющим суммирование. Он замечает, что суммы преобразуются в произведения в результате такого процесса (отсюда и название) точно таким же образом, как первоначальный случай теоремы Мёснера приводит к степеням. Автор высказывает предположение, что этот факт может быть использован для конструирования вычислительных машин. H. W. Brinkman

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 3, 199.

3614. Ошибки. Никол (Errata. Nicol C. A.), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1954, **40**, № 5, 363 (англ.)

К РЖМат, 1954, 3953.

См. также: 3615

АЛГЕБРА

3615. Развитие ассоциативной алгебры и алгебраической теории чисел. II. Вандивер (A development of associative algebra and an algebraic theory of numbers. II. Vandiver H. S.), Math. Mag., 1953, **27**, № 1, 1—18 (англ.)

Исходя из натуральных чисел, строятся отрицательные числа, дроби и действия над ними. И. Р. Шафаревич

3616 К. Алгебра: ее обширные идеи и основные достижения. Эйкен, Гендерсон (Algebra: Its big ideas and basic skills. Aiken Daymond John, Henderson Kenneth Baldwin. Book 1, XI + 419 p., 23 s., Book 2, XIII + 397 p., 23 s., New York, London, McGraw-Hill, 1954), Brit. Nat. Bibliogr., 1954, № 256, 7 (библ.)

3617 К. Лекции по высшей алгебре. Павел (Lectii de algebra superioara. Pavel Monica. 160 p., Bucureşti, Facultatea de Matematica şi Fizica. Catedra de Algebră şi Analiza Generala, 1953—1954), Bul. bibliogr., carţii, 1954, **3**, № 4, 7 (библ.)

3618 К. Сборник задач по высшей алгебре (Перев. с русс.). **Фаддеев, Соминский** (Culegere de probleme de algebră superioară. Fadeev D. K., Sominskii I. S. (Trad. din libera rusă), 352 p., Bucureşti, Editura tehnica, 1954, 10, 10 lei), Bul. bibliogr., carţii, 1954, **A3**, № 18, 9 (библ.)

3619 К. Высшая алгебра. Мостовский, Старк (Algebra wyższa. Mostowski Andrzej, Stark Marceli. 173 s., Warszawa, Państw. Wydawn. Nauk., 1954, 19 zł), Przew. bibliogr., 1954, **10**, № 31, 411 (библ.)

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

3620. Некоторые замечания относительно систем из m линейных уравнений с n неизвестными. Паньи (Alcune osservazioni sui sistemi di m equazioni lineari ad n incognite. Pagni Mauro), Boll. Unione mat. ital., 1954, **9**, № 1, 81—88 (итал.)

Излагается теория системы линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_{hk}u_k = u'_h \quad (h = 1, \ldots, m) \qquad (1)$$

без использования определителей и матричной символики. Доказывается, что для разрешимости системы необходимо и достаточно, чтобы вектор $\mathbf{u}' \equiv (u'_1, \ldots, u'_m)$ был ортогонален всякому вектору $\mathbf{v}' \equiv (v'_1, \ldots, v'_m)$, в свою очередь, ортогональному каждому из векторов $\mathbf{a}^{(k)} \equiv (a_{1k}, \ldots, a_{mk})$. Автор вводит понятие характеристики как наибольшего числа p линейно независимых среди векторов $\mathbf{a}_h \equiv (a_{h1}, \ldots, a_{hm})$ и показывает, что ту же характеристику имеют векторы $\mathbf{a}^{(k)}$. Необходимым и достаточным условием разрешимости системы (1) является равенство характеристик векторов $\mathbf{a}_h \equiv (a_{h1}, \ldots, a_{hn})$ и $\alpha_h \equiv (a_{h1}, \ldots, a_{hn}, u'_h)$ (теорема Капелли). Доказывается также аналог теоремы Руше и выводится выражение общего решения как суммы некоторого частного решения и линейной комбинации (с произвольными параметрами) $n - p$ решений соответствующей однородной системы. А. Г. Школьник

3621. К теореме Грейса. Хёрмандер (On a theorem of Grace. Hörmander Lars), Math. Scand., 1954, 2, № 1, 55—64 (англ.)

Статья посвящена обобщениям известной теоремы Грейса, имеющей важное значение в аналитической теории полиномов (Grace J. H., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1900—1902, **11**, 352—357), на произвольные алгебраически замкнутые поля характеристики 0. Один из вариантов формулировки теоремы состоит в следующем. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — аффиксы n точек круговой области D комплексной плоскости, S_k $(k = 0, \ldots, n)$ — элементарные симметрические функции этих величин, причем $S_0 = 1$. Если выполняется соотношение

$$Q^*(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \equiv a_0S_0 + a_1S_1 + \ldots + a_nS^n = 0,$$

то уравнение

$$Q(z) \equiv a_0 + \binom{n}{1} a_1 z + \binom{n}{2} a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0$$

имеет по крайней мере один корень в D. Под круговой областью здесь следует понимать область внутри или вне некоторой окружности вместе с границей или полуплоскость вместе с границей. Для уяснения сущности вводимых обобщений заметим, что: во-первых, если $Q(z) \neq 0$ в области D, то $Q^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$, каковы бы ни были $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, принадлежащие D; во-вторых, очевидно, $Q^*(z, \ldots, z) \equiv Q(z)$; в-третьих, принадлежность z к круговой области можно выразить условиями $z \neq 0$, $H(z, z) \equiv \alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma \geqslant 0$, ($\alpha$, γ — действительны), где $H(z, z)$ порождается эрмитовой симметрической формой $H(z, w)$.

Пусть теперь E — векторное пространство над произвольным алгебраически замкнутым полем K характеристики 0. Функция $P(x)$, определенная в E и принимающая значения из K, называется однородным многочленом степени n, если $P(sx + ty)$ является однородным для всякой пары $x, y \in E$ относительно $s, t \in K$ многочленом степени n в алгебраическом смысле. Ясно, что в случае конечномерного пространства E это совпадает с обычным определением однородности. Показывается, что для $P(x)$ существует единственная функция $P(x_1, \ldots, x_n)$ (полярная форма), определенная для $x_k \in E$, принимающая значения из K и обладающая следующими свойствами: 1) $P(x_1, \ldots, x_n)$ линейна относительно каждого x_k; 2) $P(x_1, \ldots, x_n)$ симметрична относительно своих аргументов; 3) $P(x, \ldots, x) = P(x)$.

Поскольку K предполагается алгебраически замкнутым, то, как известно (см. Ван-дер-Варден, Современная алгебра, ч. 1, ГТТИ, 1947, 288), существует такое вещественно замкнутое поле $K_0 \subset K$, что $K_0(i) = K$ и $-i^2 = 1$. Это дает возможность ввести в K отношение сопряжения, что, в свою очередь, открывает путь к абстрактному определению эрмитовой симметрической формы в пространстве E над полем K.

Наиболее типичная из имеющихся в статье теорем: Пусть $P(x)$ — однородный многочлен степени n, определенный в пространстве E над полем K, $H(x, y)$ — эрмитова симметрическая форма в том же пространстве. Если $P(x) \neq 0$ при всяком $x \neq 0$, для которого $H(x, x) \geqslant 0$, то при $x_k \neq 0$ и $H(x_k, x_k) \geqslant 0$ ($k = 1, \ldots, n$) полярная форма $P(x_1, \ldots, x_n)$ не обращается в нуль.

Легко заметить, что условия $x \neq 0$, $H(x, x) \geqslant 0$ аналогичны условиям принадлежности точки к круговой области комплексной плоскости, полярная форма $P(x_1, \ldots, x_n)$ является аналогом выражения $Q^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (см. выше).

В статье приведены и более общие теоремы, а также даны некоторые приложения обычной теоремы Грейса к выводу ряда неравенств, аналогичных неравенствам С. Н. Бернштейна (см. Экстремальные свойства полиномов, ч. 1, ОНТИ, 1937, 138). А. К. Харадзе

3622. Прямое решение полного уравнения третьей степени. М а р е к (Přímé řešení úplné rovnice třetího stupně. M a r e k J i ř í), Mat.-přírodověd. rozhl., 1954, 33, № 3, 78—82 (чеш.)

Выводится формула решения уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Вывод основан на использовании равенства $x^3 + ax^2 + bx + c = \left(x + \frac{a}{3}\right)^3 + c - \frac{a^3}{27}$, которое справедливо при $a^2 - 3b = 0$. Если $a^2 - 3b \neq 0$, то с помощью подстановок $x = y + u$, $y = \frac{1}{z}$ исходное уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ сводится к уравнению $z^3 + a_2 z^2 + b_2 z + c_2 = 0$. Затем, полагая $a_2^2 - 3b_2 = 0$, автор находит корни последнего уравнения. Из полученных формул выводится известная формула Кардано. Способ автора не проще других известных способов решения уравнения третьей степени. С. В. Огай

3623. Эквивалентность полиномиальных матриц. П а р к е р, П а т л е д ж (Equivalence of matrices over a polynomial domain. P a r k e r W. V., R u t l e d g e W. A.), J. London Math. Soc., 1954, 29, part 2, № 114, 172—177 (англ.)

При помощи полиномиальных матриц дается новое доказательство известной теоремы об элементарных делителях произведений матриц AB и BA. Статья новых результатов не содержит. Ф. Р. Гантмахер

3624. Ортогональные матрицы из модульных многочленов. Б р е н н е р (Orthogonal matrices of modular polynomials. B r e n n e r J. L.), Duke Math. J., 1954, 21, № 2, 225—231 (англ.)

Изучаются ортогональные матрицы, элементы которых — многочлены от одной переменной с коэффициентами из поля Z_p вычетов по простому модулю p или же из любого поля с характеристикой 2 (в случае поля Z_p такого рода многочлены автор называет модульными). При этом применяются нижеследующие обозначения и терминология: через I или I_m обозначается единичная матрица m-го порядка, C_m есть матрица порядка m, все элементы которой равны 1; T — перестановочная матрица, т. е. в каждой ее строке и в каждом столбце один и только один элемент равен единице, все же остальные — нули; $\operatorname{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ обозначает разбитую на клетки матрицу, вдоль главной диагонали которой расположены квадратные матрицы $A_1, A_2, \ldots, A_k$, а все остальные клетки состоят сплошь из нулей; A — постоянная матрица, если ее элементы являются элементами основного поля. Плоское вращение задается матрицей вида $T \operatorname{diag}(B, I) T^{-1}$, где B — ортогональная матрица второго порядка.

Основной результат: всякая ортогональная матрица, элементы которой — многочлены над полем характеристики 2, представляет собой произведение матриц двух следующих типов: а) плоские вращения $T \operatorname{diag}(I_2 + PC_2, I) T^{-1}$, б) четырехмерные вращения $T \operatorname{diag}(I_4 + PC_4) T^{-1}$; P — произвольный многочлен над рассматриваемым полем. Постоянная ортогональная матрица есть произведение постоянных матриц указанных двух типов.

Если поле содержит более двух элементов, то последний результат может быть усилен: всякая постоянная ортогональная матрица есть произведение плоских вращений. Для поля Z_2 такое усиление невозможно: матрицу $I_4 + C_4$ нельзя представить в виде произведения указанного рода.

Установлено также, что группа, порожденная плоскими вращениями, есть нормальный делитель всей группы ортогональных матриц четвертого порядка (элементы матриц — многочлены над полем характеристики 2).

В конце статьи для матриц рассматриваемого вида в простейшем случае, когда порядок матрицы равен двум, решается проблема ортогональной эквивалентности; кроме того, для нечетного p дан способ построения ортогональных матриц третьего порядка, элементы которых — многочлены над полем Z_p. Вопрос о том, дает ли этод метод все такого рода матрицы, оставлен открытым. Г. Б. Гуревич

3625. О заметке 2186: Закон размерностей Сильвестра. С т о л л (On Note 2186: Sylvester's law of nullity. S t o l l R o b e r t R.), Math. Gaz., 1954, 38, № 324, 134—135 (англ.)

В указанной заметке Дирак дал простое доказательство следующей теоремы Сильвестра: Если $AB = C$, где A, B, C — матрицы размерностей $m \times n$, $n \times p$, $m \times p$ и рангов r, s, t соответственно, то 1) $t \leqslant r$, $t \leqslant s$;

2) $t \geqslant r+s-n$. Отмечается, что данное Дираком доказательство неравенства 2) основывается на неверном неравенстве $n-r \geqslant p-t$, и указывается, как исправить рассуждение Дирака. Кроме того, дается другое простое доказательство неравенства 2). М. А. Наймарк

3626. **Двойные стохастические матрицы и диагонали матриц вращений.** Хорн (Doubly stochastic matrices and the diagonal of a rotation matrix. Horn Alfred), Amer. J. Math., 1954, **76**, № 3, 620—630 (англ.)

Находится необходимое и достаточное условие для того, чтобы векторы x и y могли быть связаны соотношением $y = Px$, где $P = \| p_{ij} \|$ — матрица, для которой существует такая действительная ортогональная матрица $A = \| a_{ij} \|$, что $p_{ij} = a_{ij}^2$. Из полученного результата выводится, что множество диагоналей ортогональных действительных матриц с определителем $+1$ — выпукло. (Под диагональю матрицы понимается точка, координатами которой служат элементы, стоящие на диагонали матрицы, взятые в их естественном порядке.) Аналогичные результаты получаются для множества диагоналей унитарных и всех действительных ортогональных матриц. Ф. И. Карпелевич

3627. **Об одном инварианте квадратичных форм по mod 2.** Витт (Über eine Invariante quadratischer Formen mod. 2. Witt Ernst), J. reine und angew. Math., 1954, **193**, № 1/2, 119—120 (нем.)

Пусть $f = \sum_{j \geqslant i}^{m} \alpha_{ij} x_i x_j$ — квадратичная форма над полем K характеристики 2. Положим $\beta_{ii} = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, $\beta_{ij} = \beta_{ji} = \alpha_{ij}$ при $i < j$. Если $|\beta_{ij}| \neq 0$, то f называется вполне регулярной. Для вполне регулярной формы $m = 2n$, и, как показал Арф (Arf C., J. reine und angew. Math., 1941, **183**, 148—167), всякая такая форма может быть приведена невырожденным линейным преобразованием к «квазидиагональному» виду $\sum_{i=1}^{n} (a_i x_i^2 + b_i x_i y_i + c_i y_i^2)$, где все $b_i \neq 0$. В цитированной работе Арфа доказано, что выражение $\sum_{i=1}^{n} a_i c_i b_i^{-2}$ с точностью до слагаемого вида $\gamma^2 + \gamma$ $(\gamma \in K)$ является инвариантом вполне регулярной формы относительно невырожденных линейных преобразований. В реферируемой работе дается другое доказательство этого факта, причем указывается явное выражение инварианта Арфа в виде рациональной функции коэффициентов формы, когда она и не приведена к квазидиагональному виду. В. Б. Демьянов

3628. **Об инварианте Арфа квадратичных форм по mod 2.** Клингенберг, Витт (Über die Arfsche Invariante quadratischer Formen mod 2. Klingenberg Wilhelm, Witt Ernst), J. reine und angew. Math., 1954, **193**, № 1—2, 121—122 (нем.)

Пусть f — вполне регулярная квадратичная форма над полем K характеристики 2, приведенная к виду $\sum_{i=1}^{n} (a_i x_i^2 + b_i x_i y_i + c_i y_i^2)$, где все $b_i \neq 0$ (см. реф. 3627). Дается еще одно доказательство того факта, установленного впервые Арфом (см. статью, цитированную в реф. 3627), что выражение $\sum_{i=1}^{n} a_i c_i b_i^{-2}$ с точностью до слагаемого вида $\gamma^2 + \gamma$ $(\gamma \in K)$ является инвариантом формы. В. Б. Демьянов

3629. **Определение центра алгебр Клиффорда для квадратичной формы над полем характеристики 2.** Кнезер (Bestimmung des Zentrums der Cliffordschen Algebren einer quadratischen Form über einem Körper der Charakteristik 2. Kneser Martin), J. reine und angew. Math., 1954, **193**, № 1—2, 123—125 (нем.)

Пусть K — поле характеристики 2, V — векторное пространство над K четной размерности $2m$, и $q(X)$ — вполне регулярная квадратичная форма над K (см. реф. 3627), рассматриваемая как функция вектора $X \in V$. Для формы q определяются следующие две алгебры Клиффорда. Первая состоит из всевозможных сумм формальных произведений вида $aX_1 \ldots X_t$, где $a \in K$, $X_1, \ldots, X_t \in V$, причем умножение определяется следующими правилами: 1) $(aX_1 \ldots X_s)(bX_{s+1} \ldots X_t) = abX_1 \ldots X_t$; 2) $X_1 \ldots X_{s-1}(aY + bZ)X_{s+1} \ldots X_t = aX_1 \ldots X_{s-1} Y X_{s+1} \ldots X_t + bX_1 \ldots X_{s-1} Z X_{s+1} \ldots X_t$; 3) $X^2 = q(X)$. Вторая алгебра является подалгеброй первой, содержащей только суммы произведений $aX_1 \ldots X_{2l}$ четного числа векторов из V. Доказывается, что центром первой алгебры является поле K, а центр второй алгебры изоморфен кольцу классов вычетов $K[x]/(x^2 + x + c)$, где c — элемент из K, определенный с точностью до слагаемого вида $\gamma^2 + \gamma$ $(\gamma \in K)$. Если q имеет вид $\sum_{i=1}^{m} (a_i x_i^2 + b_i x_i y_i + c_i y_i^2)$, где все $b_i \neq 0$, то, с точностью до указанного слагаемого, $c = \sum_{i=1}^{m} a_i c_i b_i^{-2}$. Так как центр алгебры Клиффорда определяется формой q инвариантно относительно невырожденных линейных преобразований, это дает еще одно доказательство инвариантности выражения $\sum_{i=1}^{m} a_i c_i b_i^{-2}$ с точностью до слагаемого $\gamma^2 + \gamma$. В. Б. Демьянов

3630. **Бесконечномерные квадратичные формы, допускающие композицию.** Каплански (Infinite-dimensional quadratic forms admitting composition. Kaplansky Irving), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 6, 956—960 (англ.)

Пусть A — векторное пространство (не обязательно конечномерное) над полем F. Функция $g(x)$, $x \in A$, $g(x) \in F$, называется квадратичной формой, если: 1) $g(\lambda x) = \lambda^2 g(x)$, $\lambda \in F$; 2) $f(x, y) = g(x+y) - g(x) - g(y)$ билинейна. Квадратичная форма g называется невырожденной, если $g(x) = f(x, A) = 0$ влечет $x = 0$. Доказывается следующее обобщение известной теоремы Гурвица: если алгебра A над полем F имеет единицу и допускает такую невырожденную квадратичную форму g, что $g(xy) = g(x)\,g(y)$, то: а) A — альтернативна; б) A или является полем характеристики 2, чисто несепарабельным над F, или же имеет ранг 1, 2, 4 или 8 над F; в) A или проста, или же есть прямое произведение двух экземпляров F; г) $g(x) = xx^*$, где $x \to x^*$ есть инволюция в A. Л. А. Скорняков

ГРУППЫ

3631. **К теории разложения перестановок на циклы.** Грудер (Zur Theorie der Zerlegung von Permutationen in Zyklen. Gruder Osias), Arkiv mat., 1953, **2**, № 20, 385—414 (нем.)

Исследуется проблема: определить число $f(k, n)$ (или $F(n)$) всех перестановок n символов, разбивающихся на заданное число k (соответственно, на любое число) непересекающихся циклов, порядки которых принадлежат к заданной совокупности целых положительных чисел

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \qquad (1)$$

Теорема 1. $f(k, n) = \dfrac{n!}{k!} \sum \dfrac{1}{x_1 x_2 \ldots x_k}$, где суммирование производится по всем решениям уравнения $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$, принадлежащим к совокупности (1).

В качестве следствий из теоремы 1 получаются формулы, выведенные ранее Шрёдером (Schröder E., Arch. Math. und Phys., 1882, 68).

Теорема 2. Пусть в последовательности (1) $a_i < a_{i+1}$; положим $F(0) = 1, f(0, 0) = 1, f(0, n) = 0$ при $n \geqslant 1$ и

$$h(z) = \frac{z^{a_1}}{a_1} + \frac{z^{a_2}}{a_2} + \dots$$

Тогда

$$f(z) = e^{h(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) \frac{z^n}{n!}; \quad [f(z)]^x = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{z^n}{n!};$$

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(k, n) x^k.$$

Доказательство этой теоремы проведено методом, являющимся обобщением метода, примененного Сильвестером при доказательстве его теорем о числе перестановок, разлагающихся на циклы заданных порядков.

Для функций $H_n(x)$ и $F(n)$ получены формулы

$$\frac{H_n(x)}{(n-1)!} = x \sum_{i=1}^{a_i \leqslant n} \frac{H_{n-a_i}(x)}{(n-a_i)!}; \quad \frac{F(n)}{(n-1)!} = \sum_{i=1}^{a_i \leqslant n} \frac{F(n-a_i)}{(n-a_i)!}$$

В дальнейшем рассматривается случай, когда числа a_i образуют арифметическую прогрессию: $a_i \equiv a \pmod b$, $a_i \geqslant a$.

Теорема 3—4: $f(k, n) \neq 0$ только при $n \equiv ak \pmod b$ и $n \geqslant ak$; $F(n) \neq 0$ лишь в том случае, если $n \equiv ak \pmod b$ и $n \geqslant ak$ при некотором k;

$$f(k, ak) = \frac{(ak)!}{k! a^k}; \quad \frac{f(k, n)}{(n-1)!} = \frac{f(k, n-b)}{(n-b-1)!} + \frac{f(k-1, n-a)}{(n-a)!};$$

$$\frac{F(n)}{(n-1)!} = \frac{F(n-b)}{(n-b-1)!} + \frac{F(n-a)}{(n-a)!}.$$

При этом первый член полагается равным 0 при $n \leqslant b$, а второй — при $n \leqslant a-1$ (если $a > 1$) и $f(1, n) = (n-1)!$ при $n \equiv a \pmod b$ и $n \geqslant a$, $f(1, n) = 0$ при всех других n. $F(n) = 0$ при $n \leqslant a-1$, $F(a) = (a-1)!$

Путем использования «комбинаторных матриц», значения которых выражаются через сочетания с повторениями из чисел $0, 1, 2, \dots, l$, доказана

Теорема 5. $f(k,n) = \sum \frac{(n-1)!}{(a+bi_1)(2a+bi_2)\dots((k-1)a+bi_{k-1})}$,

где суммирование производится по всем сочетаниям по $k-1$ элементу с повторениями $i_1, i_2, \dots, i_{k-1}$ из чисел $0, 1, 2, \dots, l = \frac{n-ak}{b}$.

Из теоремы 5 получается следствие: $f(k, n)$ равно сумме тех произведений P из $n-k$ различных чисел совокупности $1, 2, \dots, n-1$, которые обладают следующими свойствами:

1. Если $n-k$ сомножителей, входящих в P, разбить на группировки, в которых сомножители расположены в натуральном порядке, то P будет состоять из k таких группировок.

2. Число сомножителей в каждой группировке $\equiv a-1 \pmod b$ и $\geqslant a-1$.

Случай $a = 1$ представляет исключение, так как при $a = 1$, $k > 1$ число группировок не в точности равно k, $a \leqslant k$.

Из теоремы 5 и этого следствия получается ряд теорем о перестановках Сильвестера (Sylvester J. J., Collected mathematical papers, 1908, 2, 245—246, 247—249, 290—293).

В заключение выведены комбинаторные представления эйлеровой постоянной C и числа π:

$$C = \log \lim_{a \to \infty} \left(\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{a P_n(a)} \right), \quad \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{U(n) \sqrt{n}},$$

где $P_n(a)$ — число всех перестановок n символов, разлагающихся на непересекающиеся циклы, порядки которых $\geqslant a$; $U(n)$ — число всех перестановок n символов разлагающихся на непересекающиеся циклы нечетных порядков.

В. К. Туркин

3632. Теоретико-групповое исследование электронных зон решетки алмаза. Дёринг, Целер (Gruppentheoretische Untersuchung der Elektronenbänder im Diamantgitter. Döring W., Zehler V.), Ann. Phys., 1953, 13, № 1—5, 214—228 (нем.)

Букарт, Смолуховский и Вигнер (Bouckaert L. P., Smoluchowski R., Wigner E., Phys. Rev., 1936, 50, 58) в своей работе 1936 г., используя методы теории групп, показали, каким образом расположение зон Бриллюэна одноэлектронного спектра и свойства симметрии одноэлектронных волновых функций зависят от группы симметрии решетки. Все рассуждения они проводили для кубических решеток, операции симметрии которых сводятся к переносам, вращениям и отражениям. В настоящей работе показывается, что аналогичные результаты могут быть получены для более сложных решеток, причем в качестве примера рассматривается решетка алмаза.

Устанавливаются операции симметрии решетки алмаза и показывается, что ее группа симметрии отличается от группы симметрии кубической гранецентрированной решетки только тем, что центр инверсии для нее находится не в начале координат, а сдвинут на $^1/_8$ постоянной решетки по направлению пространственной диагонали ячейки. Вследствие этого основные операции симметрии решетки алмаза не образуют подгруппы всей группы симметрии этой решетки, включающей и переносы, что затрудняет разыскание ее неприводимых представлений. Так же как и в случае кубических решеток, рассмотрение подгруппы переносов позволяет установить, что собственные функции $u_1(\mathbf{r})$, $u_2(\mathbf{r}), \dots, u_p(\mathbf{r})$, соответствующие одному и тому же собственному значению уравнения Шредингера, могут быть представлены в виде $u_j(\mathbf{r}) = e^{i(\mathbf{k}_j \mathbf{r})} v_j(\mathbf{r})$, где функция $v_j(\mathbf{r})$ инвариантна к переносам. Приведенный волновой вектор $\mathbf{k}_j$ лежит внутри или на поверхности первой зоны Бриллюэна. Дальнейшие исследования представлений группы симметрии связаны с рассмотрением совокупности тех операций симметрии, которые оставляют волновой вектор инвариантным. В случае кубической решетки эти операции образуют группу — собственную группу волнового вектора; в случае решетки алмаза они могут группы не образовывать. Рассматриваются волновые векторы, соответствующие определенным элементам симметрии, и строятся соответствующие им представления и их характеры. Таким образом устанавливаются все неприводимые представления группы симметрии решетки алмаза. Исследуется, в каких случаях происходит слипание зон Бриллюэна, и выясняется, что в рассматриваемом случае зоны могут слипаться только попарно.

Основываясь на этом, можно показать, что если бы существовал элемент с нечетным атомным номером, имеющий решетку с симметрией решетки алмаза, то он не мог бы быть изолятором. Такого элемента не существует, но авторы отмечают, что представляет интерес самый факт возможности делать такие заключения на основании изучения свойств симметрии.

М. И. Петрашень

3633. Об одном специальном косом произведении в теории групп. Редеи, Штёр (Über ein spezielles schiefes Produkt in der Gruppentheorie. Rédei L., Stöhr A.), Acta scient. math., 1953, 15, № 1, 7—11 (нем.)

Косым произведением групп G и Γ называется множество всех пар (a, α), $a \in G$, $\alpha \in \Gamma$, с законом умножения $(a, \alpha)(b, \beta) = (a^{b^\alpha}\beta^\alpha, a^b\alpha^b\beta)$, где b^α, β^α и a^b, α^b — какие-либо функции от двух указанных аргументов, со значениями в G и Γ. В работе Редеи (J. reine und angew. Math., 1950, 188, 201—227) исследованы условия, при которых косое произведение групп есть группа, и исследованы два типа косых произведений: $G_1\Gamma$ с правилом умножения $(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, a^b\alpha^b\beta)$ и $G^2\Gamma$ с правилом умножения $(a, \alpha)(b, \beta) = (a^\alpha, \alpha^b\beta)$. В реферируемой работе исследуется новый вид косого произведения $G^{2'}\Gamma$ с правилом умножения $(a, \alpha)(b, \beta) = (a^\beta b, \alpha^b\beta)$. Устанавливается, что всякое произведение (являющееся группой) $G^{2'}\Gamma$ изоморфно некоторому $G_1^2\Gamma$, но не всякое $G^2\Gamma$ изоморфно $G^{2'}\Gamma$. Д. К. Фаддеев

3634. К теории косых произведений Редеи. Кохендёрфер (Zur Theorie der Rédeischen schiefen Produkte. Kochendörffer Rudolf), J. reine und angew. Math., 1953, 192, № 2, 96—101 (нем.)

Исследуются следующие косые произведения Редеи (см. реф. 3633): $G^3\Gamma$ с правилом умножения $(a, \alpha)(b, \beta) = (ab^\alpha, a^b\alpha\beta)$ и $G^4\Gamma$ с правилом умножения $(a, \alpha)(b, \beta) = (ab^\alpha, a^b\alpha\beta)$. Устанавливается, что если $G^3\Gamma$ есть группа, то элементы α^β порождает подгруппу G_1, лежащую в центре G, и a^b порождает подгруппу Γ_1, лежащую в центре Γ.

Подгруппа (G_1, Γ_1) лежит в центре $G^3\Gamma$ и изоморфна прямому произведению G_1 и Γ_1. Фактор-группа $G^3\Gamma$ по (G_1, Γ_1) изоморфна прямому произведению G/G_1 и Γ/Γ_1. Вычисляется система множителей для $G^3\Gamma$ как расширения (G_1, Γ_1).

Столь же полное описание дается для групп $G^4\Gamma$. Д. К. Фаддеев

3635. Добавление к исследованию частично упорядоченных групп. Жаффар (Contribution à l'étude des groupes ordonnés. Jaffard Paul), J. math. pures et appl., 1953, 32, sér. 9, № 3, 203—280 (франц.)

Реферируемая работа подытоживает серию работ того же автора, опубликованных в C. r. Acad. sci. (1950 г.) Статья состоит из трех глав. Первая глава содержит общие сведения о частично упорядоченных группах. Здесь выясняется связь изотопных гомоморфизмов l-группы с понятием t-идеала, введенным Лоренценом. Устанавливаются необходимые и достаточные условия для существования общего продолжения у двух заданных частичных упорядочений группы, а также для существования продолжения частичного упорядочения, при котором были бы положительными все элементы некоторого подмножества данной группы. Как следствия рассмотренной теории получаются известные теоремы Лоренцена о вложении частично упорядоченных групп в прямое произведение упорядоченных групп.

Вторая глава посвящена теории нитей (filet) в частично упорядоченных группах. Элементы a и b называются слабо дизъюнктными, если из $0 \leqslant x \leqslant a, b$ следует $x = 0$. Частично упорядоченная группа, в которой любые два слабо дизъюнктных элемента дизъюнктны, называется регулярной. Два положительных элемента a и b регулярной группы G относятся в один класс, если из $a \perp x$ (a дизъюнктно x) следует $b \perp x$ и обратно. Так определенный класс называется нитью. Развивается теория нитей в регулярной группе. Нить, содержащая элемент a, обозначается через $\bar{a}$. В множество нитей вводится частичная упорядоченность: $\bar{a} \geqslant \bar{b}$ тогда и только тогда, если из $a \perp x$ следует $b \perp x$ для всех $x \in G$; эта упорядоченность направленная. В l-группе множество нитей является структурой, причем $\bar{a} \cup \bar{b} = \overline{a \cup b} = \overline{a + b}$, $\bar{a} \cap \bar{b} = \overline{a \cap b}$. Нить $\bar{a}$ называется минимальной, если $\bar{a} \neq \bar{0}$ и из $\bar{x} < \bar{a}$ следует $\bar{x} = \bar{0}$. Говорят, что минимальная нить обладает свойством A, если всякий положительный элемент $x \in G$ может быть представлен в виде $x = x_1 + x_2$, где x_1, $x_2 \geqslant 0$, $\overline{x_1} \leqslant \bar{a}$, $\overline{x_2} \cap \bar{a} = \bar{0}$. Если все минимальные нити группы G обладают свойством A, то говорят, что сама группа обладает свойством A. Множество минимальных нитей группы $\leqslant \bar{x}$ обозначается через $\mathfrak{M}(\bar{x})$. Группа удовлетворяет условию M, если $\mathfrak{M}(\bar{x})$ не пусто для всякой нити $\bar{x} \neq \bar{0}$, и условию MF, если, кроме того, $\mathfrak{M}(\bar{x})$ конечно. Доказана теорема: l-группа G есть прямая сумма упорядоченных групп тогда и только тогда, если G обладает свойством A и удовлетворяет условию MF. Для этой теоремы дается несколько других эквивалентных формулировок. Конечное множество $(a_i)_{i \in S}$ элементов l-группы называется независимым, если $\inf[(a_i)_{i \in N}] > \inf[(a_j)_{j \in S}]$ для всякого подмножества $N \subset S$, $N \neq S$. Доказано, что для того чтобы l-группа была прямой суммой n упорядоченных групп, отличных от $\{0\}$, необходимы и достаточны условия: 1) G обладает свойством A, 2) n есть максимальное число независимых элементов группы G.

Применение теории нитей позволяет провести некоторое уточнение теоремы Лоренцена о том, что всякая l-группа изоморфна собственной подгруппе полного прямого произведения упорядоченных групп. Если $G \cong G' \subset \Gamma = \prod_{i \in I} G_i$, где G_i упорядочены, причем $pr_i(G) = G_i$, то говорят, что имеем реализацию группы G. Компонента G_α называется лишней, если гомоморфизм ψ_α Γ на $\Gamma' = \prod_{i \neq \alpha} G_i$ индуцирует изотопный изоморфизм G. Не лишняя компонента называется существенной. Реализация называется несократимой, если все компоненты существенны. Доказано, что l-группа допускает несократимую реализацию тогда и только тогда, если она удовлетворяет условию M. Для любых двух несократимых реализаций $G \subset \Gamma = \prod_{i \in I} G_i$ и $G \subset \Gamma' = \prod_{i' \in I'} G_{i'}$, l-группы G существует взаимно однозначное отображение ψ I на I', что $G \cap G_i = G \cap G_{\psi(i)}$ для всякого $i \in I$, причем существует изоморфизм σ_i упорядоченной группы G_i на $G_{\psi(i)}$, продолжающий предшествующее равенство (т. е. $\sigma_i(x) = x$ для $x \in G \cap G_i$).

Вводятся следующие определения: частично упорядоченная группа называется архимедовой (слабо архимедовой), если для всех пар $x, y \in G$, где $x > 0$, существует целое число n такое, что $nx \geqslant y$ ($nx \not< y$). Частично упорядоченная группа называется пара-архимедовой, если для всех пар $x, y \in G$, где $x \not\leqslant 0$, существует такое целое n, что $nx \not< y$. Показано, что в общем случае архимедовость не влечет пара-архимедовости и обратно. Доказана теорема: Для того чтобы частично упорядоченная группа G была изоморфна подгруппе аддитивной группы действительных чисел R, необходимо и достаточно выполнение следующих условий: 1) G полузамкнута (т. е. из $na \geqslant 0$ для целого положительного n следует $a \geqslant 0$) и направленна; 2) все доупорядочения группы G архимедовы; 3) если группа тривиально упорядочена, то $G = \{0\}$.

Для двух частных случаев доказывается гипотеза Крулля — Клиффорда о том, что всякая пара-архимедова группа изоморфна подгруппе прямого произведения

упорядоченных групп, изоморфных R: 1) полузамкнутая архимедова частично упорядоченная группа изоморфна группе вещественных функций тогда и только тогда, когда она пара-архимедова; 2) всякая пара-архимедова l-группа, допускающая несократимую реализацию, изоморфна группе вещественных чисел.

В третьей главе рассматриваются полунормированные поля. Отображение w мультипликативной группы K^* поля K на аддитивно записанную абелеву группу Γ, удовлетворяющее условиям: $w(xy) = w(x) + w(y)$, $w(z) \leqslant w(x)$, $w(y) \to w(z) \leqslant w(x+y)$, называется полунормой поля K (demi valuation). Если, в частности, Γ — упорядоченная группа, то получится норма в смысле Крулля. Доказывается следующее обобщение теоремы Крулля: Каждой l-группе Γ соответствует поле K, полунормированное относительно Γ. Определены все полунормы поля рациональных чисел, а также полунормы простого трансцендентного расширения K алгебраически замкнутого поля k, аннулирующиеся на k. В заключение делаются некоторые топологические выводы. Е. П. Шимбирева

3636. Об индуцированных представлениях групп Ли. Брюа (Sur les représentations induites des groupes de Lie. Bruhat François), C. r. Acad. sci., 1953, 237, № 23, 1478—1480 (франц.)

Пусть G — группа Ли, Γ — ее замкнутая подгруппа, $\alpha(\xi)$ и $\beta(\xi)$ — непрерывные одномерные унитарные представления подгруппы Γ, dx и $d\xi$ — инвариантные справа меры на G и Γ, $\rho(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция на G, $\rho(x) > 0$, $\rho(\xi x) = \rho(\xi)\rho(x)$, $d(\xi_0 \xi) = \rho(\xi_0)\, d\xi$. Обозначим $\lambda(\xi) = \rho(\xi)^{1/2}\alpha(\xi)$, $\mu(\xi) = \rho(\xi)^{1/2}\beta(\xi)$ и пусть $\mathscr{H}^\lambda$ — гильбертово пространство, состоящее из таких функций $f(x)$, что

$$f(\xi x) = \lambda(\xi) f(x), \quad \int |f(x)|^2 \rho(x)^{-1}\, d\dot{x} < \infty;$$

Здесь $d\dot{x}$ — мера на G/Γ, причем $\int \overset{\cdot}{f}(x)\rho(x)\, dx = \int d\dot{x} \int f(\xi x)\, d\xi$. Преобразование $f(x) \to f(xa)$ является унитарным представлением U^α группы G, индуцированным α (определение принадлежит Макки (Mackey G., Ann. Math., 1952, 55, 101—139)). $R^{\lambda\mu}$ — пространство линейных операторов, отображающих $\mathscr{H}^\lambda$ в $\mathscr{H}^\mu$ и коммутирующих с правыми сдвигами. Размерность $R^{\alpha\beta}$ не больше, чем размерность пространства решений $d\tilde{T}$ уравнения

$$d\tilde{T}(\xi x \eta^{-1}) = \overline{\lambda(\xi)}\,\mu(\eta)\, d\tilde{T}(x) \qquad (A)$$

($d\tilde{T}(x)$ — распределение в группе G). Пусть подгруппа Γ инвариантна и существует бесконечно дифференцируемое сечение $\dot{x} \to k(\dot{x})$ в G, индуцированное Γ; представление U^α неприводимо тогда и только тогда, когда $\alpha(\xi)$ и $\alpha(x^{-1}\xi x)$ неэквивалентны для всех $x \in G$, не принадлежащих Γ. Если U^α и U^β неприводимы, то их эквивалентность равносильна эквивалентности $\alpha(\xi)$ и $\beta(x^{-1}\xi x)$ хотя бы для одного $x \in G$. Автор указывает возможные обобщения результатов на случай неодномерных представлений подгруппы Γ, а также на случай различных подгрупп. Н. Я. Виленкин

3637. Неприводимость индуцированных представлений групп Ли. Брюа (Irréductibilité des représentations induites des groupes de Lie. Bruhat François), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 1, 38—40 (франц.)

Автор сохраняет предположения и обозначения предыдущей работы (см. реф. 3636) и предполагает, кроме того, что число двусторонних классов смежности по Γ конечно. Для каждого такого класса $P = \Gamma x \Gamma$ существует открытое в G объединение Ω двусторонних классов смежности, в котором P замкнуто. Пусть $\mathscr{P}$ — пространство распределений в Ω с носителями в P, удовлетворяющих условию (A) (см. реф. 3636). Тогда размерность $I(U^\alpha, U^\beta)$ пространства $R^{\alpha\beta}$ не превосходит суммы размерностей различных $\mathscr{P}$. Через $\mathscr{V}$ обозначается пространство распределений на $\Omega' = \Omega x^{-1}$ с носителями в $V = Px^{-1}$, удовлетворяющих условию

$$dT(\xi z \eta^{-1}) = \overline{\lambda(\xi)}\,\mu(x^{-1}\eta x)\, dT(z).$$

В достаточно малой окрестности W единицы e группы G любое $T \in \mathscr{V}$ можно представить в виде $T = \sum_{|l| \leqslant r} (-1)^{|l|} D^l T_l$, где $D^l = D_1^{l_1}, \ldots, D_q^{l_q}$ — дифференцирования в направлениях, трансверсальных V, и T_l — распространения на W распределений, определенных в $W \cap V$, $|l| = l_1 + \ldots + l_q$. Тогда $dT_m(\xi^{-1}z\eta) = \overline{\lambda(\xi^{-1})} \times \mu(x^{-1}\eta^{-1}x)\sum_{|l|=r} \nu^l_{m,0}(\xi^{-1}z\eta;\, \xi,\, \eta)\, dT_l(z)$, $|m| = r$. Через $V_r(\xi)$ обозначается оператор с матрицей

$$\| (\rho(\xi)\rho(x^{-1}\xi x))^{1/2} \rho_{\Gamma_x}(\xi)^{-1} \nu^l_{m,0}(e, \xi, \xi) \|$$

(ρ_{Γ_x} определяется для подгруппы $\Gamma_x = \Gamma \cap x\Gamma x^{-1}$ так же, как ρ для подгруппы Γ). Если представление $\alpha(\xi)\beta(x^{-1}\xi x)$ подгруппы Γ_x ни при каком $r \geqslant 0$ не содержится в представлении Γ_x матрицами $V_r(\xi)$, то $\mathscr{V}$ сводится к $\{0\}$. Если это имеет место при всех $x \in G$, то $I(U^\alpha, U^\beta) = 0$. Если при всех $x \in G$, не принадлежащих Γ, и всех целых $r \geqslant 0$ представление $\alpha(\xi)\overline{\alpha(x^{-1}\xi x)}$ не содержится в $V_r(\xi)$, то индуцированное представление U^α группы G неприводимо. Н. Я. Виленкин

3638. Индуцированные представления полупростых комплексных групп Ли. Брюа (Représentations induites des groupes de Lie semi-simples complexes. Bruhat François), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 4, 437—439 (франц.)

Пусть G — полупростая неисключительная связная комплексная группа Ли, Γ — ее максимальная разрешимая замкнутая подгруппа, H — соответствующая картановская подгруппа, χ — одномерное унитарное представление Γ:

$$\chi(hn) = \Pi_{i=1}^l |h(\alpha_i)|^{m_i + \sqrt{-1}\tau_i} h(\alpha_i)^{-m_i},$$

где m_i — целые и τ_i — вещественные числа, $h \in H$, $n \in N$, $\Gamma = HN$, N — подгруппа, соответствующая подалгебре, порожденной корневыми векторами e_α, и α пробегает систему положительных корней. Из ранее полученных результатов (см. реф. 3637) следует: если χ, рассматриваемое на H, не инвариантно ни при одном отличном от тождественного вращении из группы Вейля группы G, то представление U^χ группы G неприводимо. Если χ_1 и χ_2 — представления Γ, не сводящиеся на H одно к другому вращениями из группы Вейля, то U^{χ_1} и U^{χ_2} неэквивалентны. Результат был получен другими методами И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком (Тр. Матем. ин-та им. Стеклова, 1950, 36, 1—288). Указаны обобщения на случай, когда χ является конечномерным представлением Γ (не обязательно унитарным). Н. Я. Виленкин

3639. Индуцированные представления полупростых вещественных групп Ли. Брюа (Représentations induites des groupes de Lie semi-simples réels. Bruhat François), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 5, 550—553 (франц.)

Пусть g_0 — полупростая вещественная алгебра Ли, g — комплексифицированная алгебра, причем g — неис-

ключительная. Тогда, как известно, в $\mathfrak{g}$ имеется картановская подалгебра $\mathfrak{h}$, базис Вейля $h_1, \ldots, h_l, e_\alpha, e_{-\alpha} \ldots$ (α пробегает систему Σ положительных корней $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$) и инволютивный автоморфизм θ, сохраняющий связанную с этим базисом компактную форму $\mathfrak{g}$ и такой, что: 1) $\mathfrak{g}_0 = \{u + \sqrt{-1}\, v; u, v \in \mathfrak{g}, \theta u = u, \theta v = -v\}$; 2) $\theta h_j = -h_j$ при $1 \leqslant j \leqslant m$ и $\theta h_j = h_j$ при $j > m$; 3) если $\mathfrak{h}^1$ (соответственно $\mathfrak{h}^{-1}$) — подалгебра в $\mathfrak{g}$, порожденная h_j, $j > m$ (соответственно $1 \leqslant j \leqslant m$), то все элементы x из $\mathfrak{g}_u$, коммутирующие с $\mathfrak{h}^{-1}$ и такие, что $\theta x = -x$, принадлежат $\mathfrak{h}^{-1}$. Пусть $\mathfrak{m}$ (соответственно $\mathfrak{n}$) — подалгебра $\mathfrak{g}$, порожденная $\mathfrak{h}^1$ и такими e_α и $e_{-\alpha}$, что $\theta\alpha = \alpha$ (соответственно $\theta\alpha < 0$). Пусть G_0, G, G_u — группы, соответствующие $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_u$, $K = G_0 \cap G_u$, H (соответственно H^1, H^{-1}, N) — подгруппы G, отвечающие $\mathfrak{h}$ (соответственно $\mathfrak{h}^1$, $\mathfrak{h}^{-1}$, $\mathfrak{n}$), $H_0 = H \cap G_0$ и т. д. Пусть M_0 — централизатор H_0^{-1} в K и $\Gamma = M_0 H_0^{-1} N_0$ — замкнутая подгруппа в G_0. Обозначим через $m \to L(m)$ неприводимое унитарное представление M_0 и через $h \to \chi(h)$ унитарное одномерное представление H_0^{-1}. Им соответствует унитарное конечномерное неприводимое представление L_χ подгруппы Γ: $L_\chi(mhn) = \chi(h) L(m)$. Если χ не остается инвариантным ни при каком нетривиальном вращении, принадлежащем группе Вейля G_0, то представление U^{L_χ} группы G_0, индуцированное L_χ, неприводимо. Если L_1 и L_2 (соответственно χ_1 и χ_2) — неприводимые унитарные представления M_0 (соответственно H_0^{-1}) и χ_1 и χ_2 не сводятся друг к другу вращением из группы Вейля, то $U^{L_{\chi_1}}$ и $U^{L_{\chi_2}}$ неэквивалентны. Н. Я. Виленкин

3640. Обобщенные нормальные делители топологических групп и их приложения к комбинаторной топологии. Виленкин Н. Я., Тр. Моск. матем. о-ва, 1954, **3**, 15—88

Работа посвящена обобщению понятия нормального делителя топологической группы, связанному с неоткрытыми гомоморфизмами. Общей топологической группой G называется топологическое пространство, являющееся в то же время группой с непрерывными операциями умножения элементов и перехода к обратному элементу. Предполагается, что в G задана ограниченность (Виленкин Н. Я., Изв. АН СССР, сер. матем., 1951, **15**, № 5, 439—462). Обобщенным нормальным делителем $\mathfrak{N}$ называется совокупность $\mathfrak{N} = [N; U_\alpha]$, состоящая из нормального делителя N группы G (вообще говоря, незамкнутого) и системы окрестностей U_α единицы группы G, удовлетворяющих условиям: $N \subset \bigcap_\alpha U_\alpha$; для любых α и β найдется такое γ, что $U_\gamma \subset U_\alpha \cap U_\beta$; для любого α найдется такое β, что $U_\beta U_\beta^{-1} \subset U_\alpha$; для любого α и любого $x \in G$ найдется такое β, что $x U_\beta x^{-1} \subset U_\alpha$. Два обобщенных нормальных делителя $\mathfrak{N} = [N; U_\alpha]$ и $\mathfrak{M} = [M; V_\beta]$ тождественны, если $N = M$ и каждое U_α содержит некоторое V_β, а каждое V_β содержит некоторое U_α. Предполагается, что в N также задана ограниченность, причем каждое множество, ограниченное в N, ограничено в G. Каждому обобщенному нормальному делителю соответствует гомоморфное отображение группы G (вообще говоря, неоткрытое) на общую топологическую группу $G/\mathfrak{N}$, а каждому такому отображению соответствует обобщенный нормальный делитель. Указывается связь обобщенных нормальных делителей с обычными нормальными делителями. Для обобщенных нормальных делителей строятся операции объединения, пересечения и т. д. Два обобщенных нормальных делителя $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ группы G_1 и G_2 называются изоморфными, если в группе $G_1 \times G_2$ существует такой обобщенный нормальный делитель $\mathfrak{N}$, что его проекция на G_i равна $\mathfrak{N}_i$, а пересечение с G_i является полной системой окрестностей единицы в G_i. Далее введены пары $\mathfrak{N} : \mathfrak{M}$ обобщенных нормальных делителей, соответствующие фактор-группам N/M обычных нормальных делителей. Для них также определено понятие эквивалентности. Две цепочки $\mathfrak{N}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{N}_k$ и $\mathfrak{M}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{M}_l$ обобщенных нормальных делителей группы G можно так уплотнить, что между факторами в уплотненных цепочках можно будет установить взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие друг другу пары будут эквивалентны (а потому соответствующие факторы изоморфны). Структура обобщенных нормальных делителей дедекиндова.

Во второй главе строится теория характеров обобщенных подгрупп топологических абелевых групп. Через $N(A)$ ($A \subset G$) обозначается совокупность таких характеров χ группы G, что $|\chi(g)| \leqslant 1/4$ для любого элемента $g \in A$. Аннулятором обобщенной подгруппы $\mathfrak{N} = [N, U_\alpha, T_\lambda]$ (где T_λ — базис ограниченности в N) называется обобщенная подгруппа $[UN(U_\alpha); N(T_\lambda); N(U_\alpha)]$ группы характеров X. Для обобщенных подгрупп вводится понятие квазивыпуклости и показывается, что аннулятор любой обобщенной подгруппы квазивыпукл. Если $\mathfrak{N}$ — обобщенная подгруппа группы G, порожденная системой обобщенных подгрупп $\mathfrak{N}_\alpha$, то $N(\mathfrak{N}) = \bigcap_\alpha N(\mathfrak{N}_\alpha)$. Более сильные результаты о связи операций пересечения и объединения получены для LB-подгрупп, связанных с гомоморфными отображениями локально бикомпактных абелевых групп в подгруппы локально бикомпактных абелевых групп. Аннулятор, сумма, пересечение LB-подгрупп являются LB-подгруппами. Из эквивалентности двух пар обобщенных подгрупп, вообще говоря, не следует эквивалентность сопряженных с ними пар. Это имеет место, лишь если эквивалентность данных пар удовлетворяет некоторым требованиям правильности (имеющим место, например, для LB-подгрупп).

Третья глава посвящена теории спектров. Показано, что пределом прямых и обратных спектров топологических групп естественно считать некоторые обобщенные подгруппы: построена теория прямых и обратных спектров пар обобщенных подгрупп, для которых доказаны обычные теоремы теории спектров (возможность перехода к конфинальному подмножеству индексов, теорема о пределе стационарного спектра и т. д.). Устанавливается двойственность пределов сопряженных спектров.

В четвертой главе полученные результаты применяются к некоторым вопросам комбинаторной топологии. Строятся некоторые пары обобщенных подгрупп, названные парами Бетти, аналогичные группам Бетти для комплексов и топологических пространств, и доказываются теоремы двойственности об этих парах Бетти, обобщающие ранее известные теоремы двойственности (например, теорему Ситникова). М. И. Граев

3641 К. Теория групп. Курош (Gruppentheorie. Kurosch A. G. (Mathematische Lehrbücher u. Monographien, Abt. I, Bd 3. XI+418 S., Berlin, Akademie-Verlag, 1953, 28.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1954, № 9, 321 (библ.)

3642 Д. Исследование упорядоченных групп. Жаффар (Contribution à l'étude des groupes ordonnés... Thèse à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, mathématiques. Jaffard Paul, 80 pp.,

Paris, Gauthier-Villars, 1953), Bibliogr. France, 1954, 143, part 1, № 5, 102 (библ.)

ПОЛЯ, КЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

3643. О задаче погружения полей. Шафаревич И. Р., Докл. АН СССР, 1954, **95**, № 3, 459—461

Формулируются с изложением основных пунктов доказательств следующие теоремы:

Теорема 1. Если $G = F \times \mathfrak{G}$ есть полупрямое расширение F с нормальным делителем $\mathfrak{G}$, имеющим порядок l^α и класс c, причем $l \geqslant c$, то любое поле алгебраических чисел L/k с группой F погружаемо в поле $K \supset L$ с группой G над k.

Теорема 2. Если $G = F \times \mathfrak{G}$, порядки F и $\mathfrak{G}$ взаимно просты и $\mathfrak{G}$ нильпотента, то любое поле алгебраических чисел L/k с группой F погружаемо в поле $K \supset L$ с группой G над k.

Далее строится пример, опровергающий известное предположение Хассе о погружаемости полей (Hasse H., Math. Nachr., 1948, **1**, № 1, 40—61). В качестве группы G берется фактор-группа свободного произведения трех циклических групп простого порядка $l \neq 2, 3$ по третьему члену убывающего центрального ряда, в качестве погружаемого поля берется $k(\sqrt[l]{\alpha_1}, \sqrt[l]{\alpha_2}, \sqrt[l]{\alpha_3})$, причем поле K содержит l^2-й корень из 1. Предполагается, что $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ l-гиперпримарны и $\left(\frac{\alpha_i}{\mathfrak{p}_j}\right) = 1$, $\mathfrak{p}_j / \alpha_j$, $i \neq j$; $i, j = 1, 2, 3$.

Эти условия обеспечивают выполнение необходимого условия погружаемости Фаддеева — Хассе. Необходимым и достаточным условием погружаемости в этом случае оказывается обращение в единицу некоторого инварианта $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, который, при подходящем выборе $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ может принимать любые наперед заданные допустимые значения. Д. К. Фаддеев

3644. Существование обобщенного локального поля классов. Уэйплс (Existence of generalized local class fields. Whaples G.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, **39**, № 10, 1100—1103 (англ.)

Обобщенной теорией локальных полей классов автор называет теорию абелевых расширений полного дискретно нормированного поля k, в котором поле классов вычетов по простому идеалу совершенно и в его алгебраическом замыкании содержится одно и только одно подполе любой заданной степени n. Установлено (Moriya M., J. Math. Soc. Japan, 1951, **3**, 195—203), что обычная теорема существования поля классов в обобщенной теории неверна.

Автор вводит определение аналитической подгруппы мультипликативной группы k^* поля k и устанавливает теорему существования: Подгруппа мультипликативной группы поля k есть группа норм для конечного абелева расширения поля k в том и только в том случае, если она имеет конечный индекс в k^* и аналитична. Д. К. Фаддеев

3645. Заметка о расширениях Куммера. Ивасава (A note on Kummer extensions. Iwasawa Kenkichi), J. Math. Soc. Japan, 1953, **5**, № 3—4, 253—262 (англ.)

Пусть K — алгебраическое числовое поле, содержащее все корни из единицы и являющееся абелевым расширением конечного алгебраического числового поля. Доказывается, что мультипликативная группа поля K есть прямое произведение свободной абелевой группы и группы корней из единицы в поле K.

Обозначая через A максимальное абелево расширение поля K, автор доказывает, что группа Галуа поля A относительно K изоморфна прямому произведению счетного числа групп, каждая из которых изоморфна с группой характеров группы корней из единицы в поле K. А. И. Лапин

3646. Группы гомологий в теории полей классов. Такахаси (Homology groups in class field theory. Takahashi Shuichi), Tôhoku Math. J., 1953, **5**, ser. 2, № 1, 8—11 (англ.)

Пусть A есть либо группа классов идеальных элементов Шевалле алгебраического числового поля K, либо мультипликативная группа конечного расширения K поля p-адических чисел, G — группа Галуа поля K/k, J — аддитивная группа целых рациональных чисел с тождественными операторами из G. Ранее было показано, что верхняя группа гомологий $H^n(G, A)$, $n > 2$, изоморфна группе $H^{n-2}(G, J)$ (Tate J., Ann. Math., 1952, **56**, № 2, 294—297; см. также Боревич З. И., Изв. АН СССР, сер. матем., 1952, **16**, 427—436).

В реферируемой работе показывается, что этот изоморфизм будет иметь место для всех целых n, если в качестве верхних групп гомологий отрицательных размерностей взять нижние группы гомологий: $H^{-n}(G, A) = H_{n-1}(G, A)$, $n \geqslant 1$. При этом $H^0(G, A)$ определяется как фактор-группа группы инвариантных элементов из A по подгруппе, состоящей из элементов вида $\Sigma_{\sigma \in G} \sigma a$, $a \in A$ (в аддитивной записи), а $H_0(G, A)$ — как фактор-группа группы тех $a \in A$, для которых $\Sigma_{\sigma \in G} \sigma a = 0$, по подгруппе, порожденной элементами вида $\sigma a - a$ ($\sigma \in G$, $a \in A$). З. И. Боревич

3647. Алгебраическое доказательство теоремы Хопфа. Спрингер (An algebraic proof of a theorem of H. Hopf. Springer T. A.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, **A57**, № 1, 33—35 (англ.)

Дается новое доказательство теоремы Хопфа: коммутативное (но не обязательно ассоциативное) тело K над полем R действительных чисел изоморфно либо R, либо полю комплексных чисел. Доказательство проводится путем исследования системы симметрических билинейных форм $f_k(x, y)$ с использованием ряда теорем алгебраической геометрии. В. М. Курочкин

3648. Некоторые применения теоремы о локальной униформизации. Ланг (Some applications of the local uniformization theorem. Lang Serge), Amer. J. Math., 1954, **76**, № 2, 362—374 (англ.)

Рассматривается поле K алгебраических функций над нормированным полем констант k, полным относительно определенной в нем нормы. Предполагается, что K регулярно над k, т. е. что K сепарабельно порождаемо над k и k алгебраически замкнуто в K. Точка $\mathfrak{p}$ риманова многообразия поля K называется рациональной, если соответствующие этой точке значения всех элементов поля K принадлежат k. Пусть Γ — тихоновское произведение $\Pi_x \Gamma_x$, множители которого находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами поля K, а каждый из множителей представляет собой поле k, пополненное элементом ∞ и надлежащим образом топологизированное. Тогда множество $\mathfrak{M}$ рациональных точек может быть обычным образом взаимно однозначно отображено на некоторое подмножество $\mathfrak{M}'$ пространства Γ. Этим определяется естественная топология на $\mathfrak{M}$. Доказываются следующие предложения, являющиеся обобщениями известных фактов, относящихся к случаю, когда k — поле комплексных чисел: 1. $\mathfrak{M}'$ замкнуто в Γ; 2. Если поле k локально бикомпактно, то $\mathfrak{M}$ бикомпактно.

В случае полей алгебраических функций одного переменного, имеющих хотя бы одну рациональную точку, доказывается, что $\mathfrak{M}$ локально гомеоморфно полю k. На этой основе дается исключительно простое

доказательство известной теоремы Гарнака о числе компонент действительной алгебраической кривой.

Для полей произвольной степени трансцендентности над полным полем характеристики нуль доказывается, что из существования одной рациональной точки следует существование бесконечного множества таких точек.

В заключение приводятся две теоремы о существовании рациональных точек для полей алгебраических функций над действительно замкнутым полем констант.

А. И. Узков

3649. **О сопряженных отображениях кватернионов. Исеки** (On the conjugate mapping for quaternions. Iseki K.), Publs mathematicae, 1952, 2, № 3—4, 204—205 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Сопряженным отображением тела кватернионов над полем действительных чисел автор называет отображение, переводящее x в $\bar{x}$, где $x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$, $\bar{x} = x_1 - x_2 i - x_3 j - x_4 k$.

Даются два аксиоматических определения сопряженных отображений тела кватернионов. Пусть $f(x)$ отображает тело кватернионов в себя.

Теорема 1. Для того чтобы функция $f(x)$ давала сопряженное отображение, достаточно выполнения следующих условий: 1) $f(x)$ непрерывна при $x = 0$, 2) $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 3) $f(x) = x$ для каждого вещественного x, 4) $f(i) = -i$, $f(j) = -j$ и $f(k) = -k$.

Теорема 2. Утверждается то же, что и в теореме 1, при следующих условиях: 1) $f(x)$ непрерывна при $x=0$, 2) $xf(x) = f(x)x$, 3) $xf(x)$ вещественно для каждого x, 4) $x + f(x)$ вещественно для каждого x.

Если $f(x) = \bar{x}$, то, очевидно, условия теорем выполнены, т. е. эти условия необходимы. В ходе доказательств теорем используются все условия.

В. И. Шнейдмюллер

3650. **О строении алгебры Клиффорда. Риццa** (Sulla struttura delle algebre di Clifford. Rizza Giovanni Battista), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1954, 23, № 1, 91—99 (итал.)

Доказано, что алгебра Клиффорда C_n при $n > 1$ является прямой суммой 2^{n-2} алгебр кватернионов. Делители нуля этой алгебры заполняют 2^{n-2} линейных подпространств, размерности $2^n - 4$. М. М. Постников

3651. **Алгебраические свойства преобразований Рейнольдса. Дюбрей-Жакотен** (Propriétés algébriques des transformations de Reynolds. Dubreil-Jacotin Marie-Louise), C. r. Acad. sci., 1953, 236, № 11, 1136—1138 (франц.)

Пусть R — кольцо функций, определенных на множестве E, принимающих каждая только конечное число значений в упорядоченном поле K. Отображение T кольца R в себя называется преобразованием Рейнольдса, если: $T(f+g) = Tf + Tg$, $T(\lambda e) = \lambda e$, где $\lambda \in K$, $e(x) = 1$ при любом $x \in E$, $T(f(Tg)) = (Tf)(Tg)$, $Tf \leqslant Tg$, если $f \leqslant g$ ($f \leqslant g$ означает, что $f(x) \leqslant g(x)$ при любом $x \in E$). Подмножество $A \subset E$ называется T-идемпотентным, если для его характеристической функции C_A выполняется $TC_A = C_A$. Множество $A \subset E$ называется T-аннулируемым, если $TC_A = 0$. Разбиение множества E на классы называется T-разбиением, если любой его класс является T-идемпотентным. Пересечение θ_T всех T-разбиений назовем разбиением, соответствующим преобразованию T.

Известно (Kampé de Fériet M., Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1949, 63, 165—180), что множество Γ всех T-разбиений является подструктурой структуры всех разбиений множества E и Γ полно относительно объединений.

Автор показывает, что θ_T совпадает с пересечением θ_T всех конечных T-разбиений (T-разбиений на конечное число классов). θ_T не всегда является T-разбиением, но любой его класс должен быть либо T-идемпотентным, либо T-аннулируемым. T называется регулярным, если в E не существует T-аннулируемого элемента, являющегося пересечением T-идемпотентных элементов. Доказывается, что θ_T является T-разбиением, а Γ — полной структурой тогда и только тогда, если T регулярно. В этом случае значение Tf на каждом классе A разбиения θ_T зависит только от значений f на этом классе.

Я. В. Хион

3652. **Алгебраические свойства преобразований Рейнольдса. Дюбрей-Жакотен** (Propriétés algébriques des transformations de Reynolds. Dubreil-Jacotin Marie-Louise), C. r. Acad. sci., 1953, 236, № 20, 1950—1951 (франц.)

Продолжение предыдущей работы автора (см. реф. 3651). Рассматриваются нерегулярные преобразования Рейнольдса. Пусть B — объединение всех T-аннулируемых классов разбиения θ_T, A — дополнение этого множества в E. Показывается, что B является объединением двух непересекающихся множеств B_1 и B_2, одно из которых T-аннулируемо, а другое T-идемпотентно. Доказывается, что значения Tf не зависят от значений, которые f принимает на любом T-аннулируемом подмножестве X множества E. Далее рассматривается фактор-кольцо кольца R по идеалу функций, обращающихся в нуль на множестве A. В этом фактор-кольце также можно определить T, которое оказывается в нем уже регулярным преобразованием Рейнольдса.

Я. В. Хион

3653. **Гомоморфные образы специальных J-алгебр. Кон** (On homomorphic images of special Jordan algebras. Cohn P. M.), Canad. J. Math., 1954, 6, № 2, 253—264 (англ.)

Доказывается необходимое и достаточное условие того, чтобы гомоморфный образ специальной J-алгебры с 3 образующими был специальной J-алгеброй. Из этого условия вытекает, что гомоморфный образ специальной J-алгебры с 2 образующими есть специальная J-алгебра.

Приводится пример гомоморфизма специальной J-алгебры с 3 образующими на неспециальную J-алгебру, показывающий, что класс специальных J-алгебр не может быть охарактеризован тождественными соотношениями.

А. И. Ширшов

3654. **Неассоциативные кольца бесконечных матриц. Коппинг** (Non-associative rings of infinite matrices. Copping J.), J. London Math. Soc., 1954, 29, part 2, № 114, 177—183 (англ.)

Построены примеры неассоциативных колец бесконечных матриц с единицей и без нее. В одном из примеров построена матрица M такая, что $MM^2 \neq M^2M$. Дается также пример матрицы N такой, что NN^2 существует, но не существует N^2N.

А. И. Ширшов

3655. **О соответствиях абстрактной алгебры. Лоренцен** (Über die Korrespondenzen einer Struktur. Lorenzen Paul), Math. Z., 1954, 60, № 1, 61—65 (нем.)

Бинарное отношение ρ в абстрактной алгебре (M, F) с множеством элементов M и системой операций F называется соответствием, если ρ изотонно относительно всех операций f из F, т. е. если из одновременного выполнения отношений $x_1 \rho y_1$, $x_2 \rho y_2$, . . . следует $f(x_1, x_2, \ldots,) \rho f(y_1, y_2, \ldots)$. Множество соответствий становится абстрактной алгеброй, если ввести в нем следующие операции: 1) $x \rho \wedge \sigma y$ равносильно $x \rho y$ и $x \sigma y$ (пересечение); 2) $x \rho \sigma y$ равносильно существованию такого z, что $x \rho z$ и $z \rho y$ (умножение); 3) $x \breve{\rho} y$ равно-

сильно $\gamma\rho\varepsilon$ (обращение). Абстрактная алгебра соответствий не является структурой, так как умножение не коммутативно. Вводится отношение порядка: $\rho < \sigma$ равносильно $\rho \wedge \sigma = \rho$. В абстрактной алгебре соответствий справедливы следующие соотношения:

(I, 1). $\rho < \rho$.
(I, 2). Из $\rho < \sigma$ и $\sigma < \tau$ следует $\rho < \tau$.
(I, 3). Из $\rho < \sigma$ и $\sigma < \rho$ следует $\rho = \sigma$.
(II). $\rho < \sigma$ и $\rho < \tau$ равносильно $\rho < \sigma \wedge \tau$.
(III, 1). $\rho(\sigma\tau) = (\rho\sigma)\tau$.
(III, 2). Из $\rho_1 < \sigma_1$ и $\rho_2 < \sigma_2$ следует $\rho_1\rho_2 < \sigma_1\sigma_2$.
(III, 3). $\varepsilon\rho = \rho$, где ε — тождественное соответствие.
(IV, 1). $\breve{\breve{\rho}} = \rho$.
(IV, 2). $\rho\breve{\sigma} = \breve{\sigma}\breve{\rho}$.
(IV, 3). $\overbrace{\rho \wedge \sigma} = \breve{\rho} \wedge \breve{\sigma}$.
(V). $\rho\sigma \wedge \tau < (\rho \wedge \tau\breve{\sigma})(\sigma \wedge \breve{\rho}\tau)$.

Абстрактная алгебра, удовлетворяющая аксиомам (I—V), называется «союзом». Элемент ρ союза называется конгруэнцией, если $\varepsilon < \rho$ и $\rho\breve{\rho} < \rho$. Доказываются некоторые свойства конгруэнций и произвольных элементов союза.

Элемент β называется нормальным относительно элемента α, если для всех конгруэнций ρ, удовлетворяющих условию $\rho < \alpha$, имеет место равенство $\rho\beta = \beta\rho$. Пара элементов β_1, β_2 называется прямо подобной снизу паре элементов α_1, α_2, если $\alpha_1 = \alpha_2\beta_1$ и $\alpha_2 \wedge \beta_1 = \beta_2$. Две пары элементов α_1, α_2 и α_1', α_2' называются подобными снизу, если существует пара β_1, β_2, прямо подобная снизу обеим этим парам. Обычным способом определяется построение Цассенхауза для двух данных нормальных цепей. Доказываются некоторые свойства понятия нормальности, из которых следует теорема уплотнения: две нормальные цепи с одинаковыми концами обладают нормальными подобными снизу уплотнениями.

Конгруэнция α называется неприводимой, если из $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$ следует $\alpha = \alpha_1$ или $\alpha = \alpha_2$. Доказывается следующая теорема замещения: в двух представлениях $\alpha : \alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_m$ и $\alpha = \alpha_1' \wedge \alpha_2' \wedge \ldots \wedge \alpha_n'$, каждый неприводимый элемент α_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, m$), нормальный относительно $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{\mu-1} \wedge \ldots \wedge \alpha_m$, может быть замещен подходящим α_ν' ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), т. е. $\alpha = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{\mu-1} \wedge \alpha_\nu' \wedge \alpha_{\mu+1} \wedge \ldots \wedge \alpha_m$.

А. Х. Лившиц

3656. Обобщенная «булева» теория универсальных алгебр. II. Тождества и подпрямые суммы функционально полных алгебр. Фостер (Generalized «Boolean» theory of universal algebras. II. Identities and subdirect sums of functionally complete algebras. Foster Alfred L.), Math. Z., 1953, **59**, № 2, 191—199 (англ.)

Продолжение работы автора (РЖМат, 1955, 637) того же названия; существенно используется терминология и результаты 1-й части. Пусть $\mathfrak{A}$ будет универсальной алгеброй и $\mathfrak{A}$ — ее подалгеброй. $\mathfrak{A}$-тождество $f(\xi, \ldots) = g(\xi, \ldots)$ называется продолжаемым до $\mathfrak{A}$, если $f(\xi, \ldots) = g(\xi, \ldots)$ является $\mathfrak{A}$-тождеством; здесь $\mathfrak{A}$-переменные $\xi, \ldots$ замещены $\mathfrak{A}$-переменными $\xi, \ldots$

Теорема 6. 1. Пусть универсальная алгебра $\mathfrak{A}$ содержит подалгебру $\mathfrak{A}$ такую, что: 1) $\mathfrak{A}$ конечна и функционально полна, 2) каждое $\mathfrak{A}$-тождество продолжаемо до $\mathfrak{A}$, 3) $\mathfrak{A}$ содержит не менее чем два элемента; тогда $\mathfrak{A}$ изоморфна с нормальной подпрямой суммой $\mathfrak{A}$. В связи с этим показано совпадение некоторых различно определяемых классов функционально полных алгебр порядка $\geqslant 2$.

Изучаются функционально полные алгебры.

Теорема 9. 1: Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}$ — одноименные алгебры (т. е. с одними и теми же операциями), содержащие не менее чем по два элемента, и пусть: 1) $\mathfrak{A}$ конечна и строго функционально полна и 2) каждое строгое тождество в $\mathfrak{A}$ является также тождеством в $\mathfrak{A}$; тогда: 1) $\mathfrak{A}$ изоморфна нормальной подпрямой сумме $\mathfrak{A}$ и 2) каждое строгое тождество в $\mathfrak{A}$ является тождеством в $\mathfrak{A}$.

Теорема 9. 3. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}$ удовлетворяют предположениям теоремы 6.1 или теоремы 9.1; тогда, если $\mathfrak{A}$ — конечная алгебра, то $\mathfrak{A}$ изоморфна прямой сумме $\mathfrak{A}$ и порядок $\mathfrak{A}$ есть степень порядка $\mathfrak{A}$.

Множество $I = \{\ldots, I_i, \ldots\}$ тождеств в алгебре называется фундаментальным, если любое тождество в этой алгебре является логическим следствием тождеств из I. Пусть $E = \{\ldots, E_i, \ldots\}$ — множество уравнений в алгебре (т. е. множество пар слов от элементов алгебры и неизвестных, записанных в операциях данной алгебры). Гомоморфный образ алгебры, в котором данное множество уравнений E обращается в множество тождеств, называется моделью для E. Каждое множество уравнений E имеет одноэлементную модель, называемую тривиальной. Если E имеет лишь тривиальную модель, то E называется несовместимым, в противном случае совместимым. Пусть E' — строгое уравнение и $\overline{E} = E(E')$ обозначает множество тождеств, полученное из тождеств E присоединением к нему уравнения E'. Если E' логически следует из тождеств E, то пишем $\overline{E}$ экв. E. Множество E уравнений называется насыщенным, если для всякого E', или E' экв. $\overline{E}$, или $\overline{E}$ несовместимо.

Теорема 12.1. Пусть $\mathfrak{A}$ — строго функционально полная (конечная) алгебра порядка $\geqslant 2$ и пусть $I = \{\ldots, I_i, \ldots\}$ — фундаментальное множество строгих тождеств в $\mathfrak{A}$; тогда I насыщено. Ю. И. Соркин

3657. Булевы структуры и множество структур. Эномото (Boolean lattices and set lattices. Enomoto Shizu), Sûgaku, 1953, **5**, 1—10 (англ.)

Излагаются результаты работы автора (Osaka Math. J., 1953, **5**, 99—115). Используя понятие «ветвления множества» (ramification set) (Horn A., Tarski A., Trans. Amer. Math. Soc., 1948, **64**, 467—497), автор изучает представление булевой алгебры алгеброй множеств. В частности, теорема 3.1. устанавливает эквивалентность следующих четырех условий для булевой алгебры A: 1) A изоморфна алгебре множеств F, обладающей свойством: $S_0 = \Sigma_{\mu\in\Delta} S_\mu$, если наименьшее множество S_0, содержащее S_μ, $\mu \in \Delta$, принадлежит F. Изоморфизм $s \to S$ подразумевается таким, что $\bigcup_{\mu\in\Delta} s_\mu \in A$ влечет $U_{\mu\in\Delta} s_\mu \to \Sigma_{\mu\in\Delta} S_\mu$. 2) Для любого $s \in A$, $s \neq 0$, существует 0—1-значная ограниченная аддитивная мера f, для которой $f(s) = 1$ и $f(\bigcup_{\mu\in\Delta} s_\mu) = 0$, если $f(s_\mu) = 0$, $\mu \in \Delta$. 3) A является атомной. 4) A является полной дистрибутивной в некотором обобщенном смысле. Эта теорема дает утвердительный и развернутый ответ на проблему (см. предыдущую ссылку): охарактеризовать атомность булевой алгебры. Теорема 3.2 констатирует, что 1) и 2) остаются эквивалентными друг другу, если мы ограничим мощность $\overline{\overline{\Delta}}$ для Δ требованием быть $\leqslant \nu$. Кроме того, если мощность каждого ветвления множества из A будет $\leqslant \nu$, то условия 1) или 2) в теореме (3.2) влекут за собой атомность A. K. Yosida

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 5, 389.

См. также: 3548 К, 3575, 3592, 3594, 3595, 3596, 3598, 3599, 3779, 3796, 3838, 3850, 3859, 3911, 3925, 3988, 3989, 4017.

ТОПОЛОГИЯ

3658. Некоторые следствия одномерной полусвязности. Планкетт (Some implications of semi-1-connectedness. Plunkett Robert L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 4, 665—670 (англ.)

Топологическое пространство X называется n-мерно полусвязным в точке $x \in X$, если существует такая окрестность U точки x, что всякий n-мерный (компактный) цикл в U ограничивает в X. В работе изучается одномерная полусвязность в этом смысле. Предполагается, что X — континуум; область коэффициентов — произвольное тело. Доказываются следующие теоремы:

1. Если континуум X одномерно полусвязен, в точке $x \in X$, то существует окрестность V точки x, обладающая следующим свойством: если Q — такая область (т. е. связное открытое множество), что $\overline{Q} \subset V$, то никакой континуум, расположенный в $V \setminus Q$, не пересекается с двумя компонентами границы области Q.

2. Если X — локально связный континуум, одномерно полусвязный в локально не разбивающей точке $x \in X$, то континуум X периферически связен в точке x (пространство X называется периферически связным в точке $x \in X$, если для всякой окрестности точки x найдется меньшая окрестность со связной границей).

3. Если X — локально связный континуум, одномерно полусвязный в локально не разбивающей точке $x \in X$, то существует произвольно малая окрестность V точки x, обладающая следующим свойством: ко всякой области Q, содержащейся в V, имеется такая компонента C границы области Q, что компонента множества $X \setminus C$, содержащая Q, содержится в V.

4. Пусть X — локально связный континуум и $T \subset X$ — вполне разрывный компакт, все точки которого суть локально не разбивающие точки континуума X. Если континуум X одномерно полусвязен в каждой точке $x \in T$, то существует сколь угодно мелкое покрытие множества T попарно непересекающимися открытыми в X множествами, граница каждого из которых связна.

П. С. Александров

3659. Разбиения и квазикомпактные отображения. Мартин (Decompositions and quasi-compact mappings. Martin Abram V.), Duke Math. J., 1954, **21**, № 3, 463—469 (англ.)

В работе выясняется, при каких условиях, налагаемых как на топологическое пространство X, так и на непрерывное его отображение f, образ $Y = f(X)$ пространства X будет метризуемым пространством с теми или иными топологическими свойствами. Основных теорем — две.

Теорема 5. Если f — квазикомпактное и монотонное отображение, а X — локально компактное метрическое пространство со счетной базой, то таким же будет и его образ $Y = f(X)$, если только он является хаусдорфовым пространством. (Непрерывное отображение называется квазикомпактным, если каждое множество $A \subset Y$, для которого полный прообраз открыт, само является открытым.)

Теорема 6. Если f — замкнутое и компактное отображение, а X — метрическое пространство со счетной базой, то таким же будет и его образ $Y = f(X)$. (Непрерывное отображение называется компактным, если полный прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in Y$ компактен.)

Доказательства проводятся с помощью несколько обобщенной теории непрерывных разбиений П. С. Александрова (см. Alexandroff P., Math. Ann., 1926, **96**, 555; Alexandroff P., Hopf H. Topologie, Berlin, 1935, 61—65), которые называются автором каноническими разбиениями. (При этом оказывается, что квазикомпактные отображения совпадают с сильно непрерывными отображениями в смысле П. С. Александрова.) Приводятся примеры, показывающие, что условия монотонности, компактности и квазикомпактности, налагаемые на отображения, а также условия локальной компактности и хаусдорфовости, налагаемые на пространства, в условиях вышеприведенных теорем не могут быть ослаблены.

Ю. М. Смирнов

3660. О замкнутых отображениях. Ханаи (On closed mappings. Hanai Sitiro), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 4, 285—288 (англ.)

Работа относится к тому же кругу вопросов, что и предыдущая (см. реф. 3659). Основные результаты: а) если f — замкнутое компактное отображение хаусдорфова пространства X со счетной базой на бикомпактное пространство Y, то Y компакт (непрерывность отображения f вытекает из сформулированных условий); б) если f — непрерывное замкнутое компактное отображение хаусдорфова пространства X со счетной базой, то тогда и его образ $Y = f(X)$ будет пространством со счетной базой; в) если f — непрерывное замкнутое отображение метрического пространства X, то тогда и его образ $Y = f(X)$ будет метрическим пространством; г) если f — непрерывное замкнутое компактное отображение локально компактного метрического пространства X, то и его образ $Y = f(X)$ будет локально компактным метрическим пространством. Ни одно доказательство не опирается на теорию непрерывных разбиений. Под пространством всюду понимается T_1-пространство.

Ю. М. Смирнов

3661. Пространства со слабой топологией. Коэн (Spaces with weak topology. Cohen D. E.), Quart. J. Math., 1954, **5**, № 17, 77—80 (англ.)

Пусть Σ — некоторая система подмножеств множества X, являющихся топологическими пространствами и обладающих тем свойством, что каждые два множества A, B системы Σ индуцируют на $A \cap B$ одну и ту же топологию. Слабой топологией t_Σ множества X относительно системы Σ называется такая топология, в которой замкнутыми являются лишь множества, пересекающиеся с каждым $A \in \Sigma$ по замкнутому в A множеству.

Если существуют топологии множества X, которые порождают первоначально данную топологию на каждом $A \in \Sigma$, то t_Σ принадлежит к числу этих топологий и является самой слабой из них (т. е. имеющей наибольший запас замкнутых множеств). Даются простые условия для того, чтобы топология t_Σ порождала первоначально данную топологию на каждом $A \in \Sigma$. Топологическое пространство R автор называет K-пространством, если его топология совпадает с t_Σ, где Σ — система всех бикомпактных множеств пространства R. Любое локально бикомпактное пространство, а также любой комплекс Уайтхеда (клеточный комплекс, имеющий слабую топологию и являющийся замкнуто-конечным; см. Whitehead J. H. C., Bull. Amer. Math. Soc., 1949, **53**, № 3, 213—245) являются K-пространствами. Замкнуто-конечный клеточный комплекс, являющийся хаусдорфовым K-пространством, тогда и только тогда является комплексом Уайтхеда, когда каждое его бикомпактное множество содержится в некотором конечном подкомплексе. Два комплекса Уайтхеда, определенных на одном и том же множестве точек, тогда и только тогда имеют одну и ту же топологию, когда тождественное отображение каждой клетки одного непрерывно в топологии другого.

Ю. М. Смирнов

3662. О пространствах, имеющих слабую топологию относительно замкнутых покрытий. Морита (On spaces having the weak topology with respect to closed coverings. Morita Kiiti), Proc. Japan Acad., 1953, **29**, № 10, 537—543 (англ.)

Доказывается целый ряд интересных (в некотором смысле аддиционных) теорем для пространств, имеющих слабую топологию относительно замкнутых покрытий. Согласно автору, топологическое пространство X имеет слабую топологию относительно покрытия $\alpha = \{A\}$, если для любой системы $\beta \subseteq \alpha$ сумма $\bigcup_{A \in \beta} A$ замкнута в X и если любое множество $C \subseteq \bigcup_{A \in \beta} A$, пересекающееся с каждым $A \in \beta$ по замкнутому в A множеству, само замкнуто в X (ср. реф. 3661).

Если замкнутое покрытие α топологического пространства X локально конечно, то X имеет слабую топологию относительно α. Пусть X имеет слабую топологию относительно замкнутого покрытия $\alpha = \{A\}$. Тогда: 1) для каждого локально конечного замкнутого покрытия $\{B\}$ любого локально бикомпактного хаусдорфова пространства Y произведение $X \times Y$ имеет слабую топологию относительно покрытия $\{A \times B\}$; 2) если каждое $A \in \alpha$ нормально, то нормально и все X; 3) если для каждого $A \in \alpha$ размерность (определенная с помощью покрытий) $\dim A \leqslant n$, то и $\dim X \leqslant n$; 4) если каждое $A \in \alpha$ наследственно (совершенно) нормально, то наследственно (совершенно) нормально и все X; 5) если каждое $A \in \alpha$ метризуемо, то любое подмножество пространства X паракомпактно и совершенно нормально (наследственная нормальность означает, что каждое подмножество данного пространства нормально, а совершенная нормальность — что каждое его замкнутое подмножество имеет тип G_δ). Вообще говоря, в последнем утверждении слово «паракомпактно» заменить на «метризуемо» нельзя. Однако, если покрытие α локально конечно, то пространство X оказывается метризуемым (Nagata J., J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., 1950, 1, № 2, 93—100). В качестве следствия утверждения 5) отметим, что замыкание каждой клетки любого комплекса Уайтхеда (CW-комплекс) является компактом.

Примечание референта. Данное выше определение автора можно упростить, потребовав в нем лишь, чтобы для любой системы $\beta \subseteq \alpha$ всякое множество $C \subseteq \bigcup_{A \in \beta} A$, пересекающееся с каждым $A \in \beta$ по замкнутому в A множеству, было замкнуто в X.

Ю. М. Смирнов

3663. О сепарабельности топологических пространств. Дубикайтис (On the separability of topological spaces. Dubikajtis L.), Colloq. math., 1954, 3, № 1, 31—32 (англ.)

Автор делает замечание, что в статье референта «О сепарабельности топологических пространств» (Colloq. math., 1948, 1, 279—284) было опущено некоторое условие при перечислении логических связей между различными определениями сепарабельности топологических пространств. Это замечание пополняет доказательство теоремы, приведенной в указанной работе. R. Sikorski

3664. Замечание о топологическом произведении двух компактных пространств. Рыль-Нардзевский (A remark of the Cartesian product of two compact spaces. Ryll-Nardzewski C.), Bull. Acad. polon. sci., 1954, 2, № 6, 265—266 (англ.)

Заметка о декартовом произведении двух компактных пространств. Рыль-Нардзевский Ц., Бюлл. Польск. АН, Отд. 3, 1954, 2, № 6, 269—270

Пусть X — компактное пространство, вес которого в каждой точке не превосходит $\mathfrak{m}$ (т. е. в каждой точке существует базис, содержащий $\leqslant \mathfrak{m}$ окрестностей), а Y — $\mathfrak{m}$-компактное пространство (из каждого открытого покрытия, содержащего $\leqslant \mathfrak{m}$ элементов, можно выбрать конечное покрытие). При этих условиях автор доказывает, что произведение $X \times Y$ компактно. Эта теорема является обобщением теоремы Катетова (РЖМат, 1954, 5480), утверждающей, что произведение компактного и бикомпактного пространств компактно. R. Sikorski

3665. Об одном открытом вопросе относительно неподвижных точек. Стротер (On an open question concerning fixed points. Strother Wayman L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 6, 988—992 (англ.)

Рассматривается вопрос о существовании неподвижных точек при многозначных непрерывных отображениях.

Многозначное отображение f пространства X в компактное хаусдорфово пространство Y непрерывно, если выполнены следующие условия: 1) для любой точки $x_0 \in X$ множество $f(x_0)$ замкнуто; 2) если V — открытое множество, содержащее $f(x_0)$, то существует такая окрестность U точки x_0, что при $x \in U$ имеем: $f(x) \subset V$; 3) если V — окрестность точки $y_0 \in f(x_0)$, то существует такая окрестность U точки x_0, что при $x \in U$ пересечение $f(x) \cap V$ непусто.

Доказано, что всякое многозначное непрерывное отображение f числового отрезка в себя имеет неподвижную точку (т. е. такую точку x, что $x \in f(x)$). Построено непрерывное многозначное отображение квадрата в себя, не имеющее неподвижных точек. Из этого следует, что если T — тихоновский куб (т. е. тихоновское произведение некоторого числа единичных отрезков), имеющий размерность > 1, то существует непрерывное многозначное отображение $f: T \to T$, не имеющее неподвижных точек.

Кроме того, в работе доказаны две теоремы о существовании неподвижных точек для непрерывных многозначных отображений частного вида. Пусть $T = \Pi_{\alpha \in A} I_\alpha$ — тихоновский куб, а h — гомеоморфное отображение пространства Y на множество $h(Y) \subset T$, являющееся ретрактом куба T. Непрерывное многозначное отображение $f: X \to Y$ автор называет декартовым, если для любой точки $x_0 \in X$ множество $hf(x_0)$ имеет вид $\Pi_{\alpha \in A} M_\alpha$, где $M_\alpha \subset I_\alpha$. Непрерывное многозначное отображение f автор называет вершинным, если существует такое $\alpha_0 \in A$, что для любой точки $x_0 \in X$ в множестве $hf(x_0)$ существует только одна точка y_0, удовлетворяющая условию

$$p_{\alpha_0}(y_0) \geqslant p_{\alpha_0}(y), \quad y \in hf(x_0)$$

(p_{α_0} есть проекция куба T на сомножитель I_{α_0}). Доказаны теоремы о том, что всякое декартово и всякое вершинное отображение пространства в себя имеет неподвижную точку. В. Г. Болтянский

3666. Проблема И. Ф. Паля. Урбаник К., Бюл. Польской АН, Отд. 3, 1954, 2, № 5, 203—205

Проблема И. Ф. Паля. Урбаник (Sur un problème de J. F. Pál sur les courbes continues. Urbanik K.), Bull. Acad. polon. sci., 1954, 2, № 5, 205—207 (франц.)

Доказывается следующая теорема, являющаяся решением проблемы, поставленной Палем и опубликованной после его смерти Бундгаардом (Bundgaard S., Math. scand., 1953, 1, 171; проблема 1).

Пусть в метрическом пространстве X задана непрерывная кривая $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, причем $x(0) \neq x(1)$. Для всякого $n = 1, 2, \ldots$ существует такая система чисел

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1} = 1,$$

что

$$\rho[x(t_{i-1}), x(t_i)] = \rho[x(t_i), x(t_{i+1})], \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

(ρ обозначает расстояние в X). А. С. Пархоменко

3667. **Изменение порядка по отношению к отделимым замкнутым непрерывным кривым. Брауэр** (Ordnungswechsel in Bezug auf eine coupierbare geschlossene stetige Kurve. Brouwer L. E. J.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, **A57**, № 2, 112—113; Indagationes math., 1954, **A17**, № 12, 112—113 (нем.)

Автор исправляет свое «интуиционистское» доказательство теоремы Жордана, опубликованное в Proc. Koninkl. akad. wetensch., 1925, 28, 503—508.

А. С. Пархоменко

3668. **Локальные строения. Эресман** (Structures locales. Ehresmann Charles), Ann. mat. pura ed appl., 1954, 36, 133—142 (франц.)

Доклад, прочитанный автором в марте 1952 г. в Риме. Даны различные определения, относящиеся к локальным строениям (РЖМат, 1953, 624), и приведены примеры.

Рассмотрим некоторые из определений. Пусть s — локальное строение на множестве E, а Φ — класс открытых в E множеств, на которых (в силу закона индукции) определены строения того же типа. Локальными автоморфизмами множества E называются такие гомеоморфизмы $f: U \to U'$, $U \in \Phi$, $U' \in \Phi$, которые осуществляют изоморфизмы имеющихся на U, U' строений. Множество Γ всех локальных автоморфизмов является псевдогруппой преобразований, т. е. удовлетворяет следующим условиям: 1) каждый элемент $f \in \Gamma$ есть гомеоморфизм некоторого множества $U \in \Phi$ на множество $U' \in \Phi$; 2) взаимно однозначное отображение множества $\bigcup_i U_i, U_i \in \Phi$, в E тогда и только тогда принадлежит Γ, когда f, рассматриваемое на каждом U_i, принадлежит Γ; 3) тождественные отображения $U \to U$, $U \in \Phi$, принадлежат Γ.

Пусть s и s' — локальные строения одного и того же типа, заданные соответственно на множествах E и E'. Локальный изоморфизм (называемый также локальной картой) есть гомеоморфное отображение $f: U \to U'$, $U \in \Phi$, $U' \in \Phi'$, осуществляющее изоморфизм индуцированных строений. Множество $\{f_i\}$ локальных карт $f_i: U_i \to U_i'$ называется атласом, если множества $\{U_i'\}$ покрывают E'. В случае существования атласа строение E' называют локально изоморфным строению E. Локальные карты, составляющие атлас, удовлетворяют следующему условию совместимости с псевдогруппой Γ: если f_i и f_j — две карты с одним и тем же множеством $U_i' = U_j'$, то отображение $f_j^{-1} f_i : U_i \to U_j$ принадлежит псевдогруппе Γ, связанной со строением E. Обратно, если задано семейство взаимно однозначных отображений $f_i: U_i \to U_i'$, для которого множества U_i' покрывают E' и которое удовлетворяет условиям совместимости с псевдогруппой Γ, то это семейство однозначно переносит имеющиеся на E топологию и локальное строение на множество E', причем E' оказывается локально изоморфным строению E, а $\{f_i\}$ — атласом.

Прибавление к атласу любого числа совместимых с ним гомеоморфизмов даст новый атлас. Каждый атлас содержится в единственном полном атласе (т. е. атласе, к которому присоединение новых отображений невозможно). Если в E' задан полный атлас, совместимый с заданной в E псевдогруппой преобразований, то в E' определяется локальное строение («ассоциированное» с рассматриваемым атласом). Таким путем можно задать, например, следующие локальные строения в многообразиях: гладкость, аналитичность, квазикомплексное строение и т. п.

Наконец, рассмотрим понятие локального ростка. Пусть s и s' — локальные строения одного и того же типа, заданные в E и E'. Локальные изоморфизмы f и f', заданные в некоторых окрестностях точки $x \in E$, называются локально эквивалентными, если они совпадают в некоторой окрестности $U \in \Phi$ точки x. Классы эквивалентности называются локальными ростками в точке x. В множестве $\Pi(E, E')$ локальных ростков вводится естественная топология; определены естественные проекции $\alpha: \Pi(E, E') \to E$ и $\beta: \Pi(E, E') \to E'$, являющиеся локальными гомеоморфизмами. При $E = E'$ множество $\Pi(E)$ всех локальных ростков представляет собой группоид.

В. Г. Болтянский

3669. **Критерий существования множителей в любом графе. Калуца** (Ein Kriterium für das Vorhandensein von Faktoren in beliebigen Graphen. Kaluza Theodor, Jr), Math. Ann., 1953, **126**, 464—465 (нем.)

Приведен критерий существования множителей в графах.

Конечная или бесконечная последовательность AB, BC, CD, ... ребер графа называется путем, если $A, B, C, D, \ldots$ — различные вершины. Число звеньев конечного пути называется его длиной. Говорят, что путь не имеет четной длины, если он или обладает нечетной длиной, или является односторонне бесконечным. Аналогично путь не имеет нечетной длины, если он или обладает четной длиной, или является односторонне бесконечным.

Пусть $\{G_\alpha\}$ — множество графов, имеющих одно и то же множество вершин $\{A, B, C, \ldots\}$ и попарно не имеющих общих ребер. Граф G с вершинами $\{A, B, C, \ldots\}$, содержащий все звенья, которые входят в рассматриваемые графы G_α, называется произведением графов (множителей) G_α и обозначается через $G = \prod G_\alpha$. Одной из важных задач в теории графов является задача о разложении графов на множители. Обычно рассматривают случай регулярных графов. Граф называется регулярным графом порядка σ, если к каждой вершине примыкает ровно σ ребер.

Пусть T — произвольный граф, а W — граф, являющийся либо конечным путем, либо односторонне бесконечным путем. Скажем, что граф W присоединен к графу T, если концевая точка графа W отождествлена с одной точкой графа T и других общих частей графы не имеют. Пусть теперь W — конечный путь. Скажем, что к графу T присоединен мостик, если концы графа W отождествлены с двумя различными точками графа T и других общих частей графы не имеют.

Теорема. Любой граф G тогда и только тогда обладает регулярным множителем первого порядка, когда каждая из его компонент может быть получена из пути, не имеющего четной длины, последовательным присоединением мостиков нечетной длины и путей, не имеющих нечетной длины.

Доказательство опирается на теорему о полной упорядоченности.

С. В. Яблонский

3670. **О расслоенных пространствах. Джеймс, Уайтхед** (Note on fibre spaces. James I. M., Whitehead J. H. C.), Proc. London Math. Soc., 1954, 4, № 14, 129—137 (англ.)

Доказывается, что при некоторых довольно общих условиях расслоенное пространство, слоем которого является его ретракт, имеет гомотопический тип прямого произведения (с теми же слоем и базой).

Пространство Q называется доминирующим пространство P, если существуют такие отображения $u: P \to Q$, $v: Q \to P$, что отображение $u \circ v$ пространства Q в себя гомотопно тождественному. Пусть X — расслоенное пространство со слоем A, базой Y и проекцией f. Предполагается, что существует ретрагирующее отображение $g: X \to A$, и что пространства X и $Y \times A$ домини-

руются клеточными разбиениями (CW-комплексами). Доказано, что при этих условиях отображение $h: X \to Y \times A$, определяемое соотношением $h(x) = (f(x), g(x))$, является гомотопической эквивалентностью (формулировка авторов несколько более общая).

Из дальнейших приводимых авторами результатов отметим следующие. Пусть B и B' — косые произведения над сферой S^n, $n \geqslant 2$, которые являются связными клеточными разбиениями, имеющими один и тот же гомотопический тип, причем слоями этих косых произведений служат их подразбиения (подкомплексы) размерности $\leqslant q$. Для того чтобы пары (B, A), (B', A') имели один и тот же гомотопический тип, достаточно, чтобы было выполнено одно из следующих двух условий: 1) $n > q+1$ или 2) $n = q+1$, и рассматриваемые косые произведения обладают секущими поверхностями.

Пусть далее X и X' — связные косые произведения над сферой S^n, имеющие один и тот же гомотопический тип, слои которых являются конечными полиэдрами одного и того же гомотопического типа с конечными фундаментальными группами. Тогда из существования секущей поверхности в одном из этих косых произведений следует существование ее в другом произведении. В. Г. Болтянский

3671. О двумерных асферических комплексах. Коккрофт (On two-dimensional aspherical complexes. Cockcroft W. H.), Proc. London. Math. Soc., 1954, **4**, № 15, 375—384 (англ.)

Пусть L — конечный связный неасферический двумерный полиэдр (тело клеточного разбиения). Доказано, что если его фундаментальная группа либо абелева, либо конечна, либо свободна, или если он содержит только одну двумерную клетку, то любой полиэдр, полученный из полиэдра L приклеиванием двумерных клеток, неасферичен. Доказано также, что если конечный связный двумерный полиэдр имеет абелеву фундаментальную группу, то эта группа свободна и имеет не более двух образующих. Кроме того, если конечный связный двумерный полиэдр имеет свободную фундаментальную группу, то из его ацикличности в размерности два следует его асферичность.

Доказательства основаны на известных формулах Хопфа, связывающих фундаментальную группу с двумерной группой гомологий. М. М. Постников

3672. О гомотопической классификации отображений четырехмерных полиэдров в односвязное пространство с тривиальной трехмерной гомотопической группой. Уэхара (On a homotopy classification of mappings of a four-dimensional polyhedron into a simply-connected space with vanishing 3rd homotopy group. Uehara Hiroshi), J. London Math. Soc., 1954, **29**, № 3, 292—309 (англ.)

Решается задача, сформулированная в заголовке. Фактически автор вычисляет первый нетривиальный фактор любого односвязного пространства, трехмерная гомотопическая группа которого тривиальна. Поэтому результаты работы применимы и к любым другим гомотопическим задачам, сводящимся к вычислению этого фактора.

Вычисление фактора произведено посредством стандартной процедуры, основанной на рассмотрении гомотопических групп и гомологических свойств некоторых клеточных разбиений. В связи с этим вводятся три новые гомологические операции, определение которых основывается на стинродовском умножении ко-цепей. М. М. Постников

3673 Д. Комбинаторная топология незамкнутых множеств. Ситников К. А., Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1955

См. также: 3640, 3688, 3689, 3746, 3928, 3942

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

3674. О различных определениях понятия абсолютно нульмерных множеств. Пхакадзе Ш. С., Сообщ. АН ГрузССР, 1954, **15**, № 8, 489—496

В предыдущей работе автора (РЖМат, 1955, 2610) был введен термин «абсолютно нульмерное множество». Даются еще три более широких определения этого термина и устанавливается, что каждое из этих новых определений таково, что сумма конечного числа абсолютно нульмерных множеств не обязательно абсолютно нульмерна. И. П. Натансон

3675. Новое доказательство теоремы покрытия Витали. Поенару (O nouă demonstrație a teoremei de acoperire a lui Vitali. Poenaru Valentin), Comun. Acad. R. P. Române, 1954, **4**, № 5-6, 191—194 (рум.; резюме русс., франц.)

Предлагается новое доказательство теоремы Витали о покрытии множества системой замкнутых множеств в n-мерном евклидовом пространстве. Р. С. Гутер

3676. Об одном соотношении между двумя линейными преобразованиями. Серпинский (Sur une relation entre deux substitutions linéaires. Sierpiński W.), Fundam. math., 1954, **41**, № 1, 1—5 (франц.)

Пусть φ_1, φ_2 — два линейных преобразования $\varphi_i(x) = a_i x + b_i$, $a_i \neq 0$, $i = 1, 2$. Обозначим через $\psi\theta$ результат последовательного выполнения преобразований ψ, θ, через ψ^k — результат последовательного выполнения k преобразований, каждое из которых равно ψ, а через ψ^{-k} — преобразование, обратное к ψ^k.

Автор определяет 12 целых чисел $k_1, k_2, \ldots, k_{12}$ таких, что $\varphi_1^{k_1} \ldots \varphi_2^{k_{12}}$ есть тождественное преобразование для произвольных φ_1, φ_2. Доказывается также, что не существует 11 или менее целых чисел $l_1, l_2, \ldots,$ для которых $\varphi_1^{l_1} \varphi_2^{l_2} \ldots$ есть тождественное преобразование для всяких φ_1, φ_2. В конце работы автор указывает что в доказательстве утверждения 2 его работы «Sur un ensemble plan singulier» (Fundam. math., 1950, **37**, 1—4) имеется ошибка. A. Mostowski

3677. Пример всюду разрывной функции, обладающей свойством Дарбу. Бобок (Un exemplu de o funcție continuă Darboux, discontinuă peste tot. Boboc N.), Comun. Acad. R. P. Române, 1954, **4**, № 5—6, 199—200 (рум.; резюме русс., франц.)

Строится пример всюду разрывной функции, обладающей свойством Дарбу и такой, что каждый элемент области значений этой функции имеет плотный прообраз. П. И. Романовский

3678. Новое доказательство одной теоремы Данжуа. Фояш (O nouă demonstrație a unei teoreme a lui Denjoy. Foiaș Ciprian), Comun. Acad. R. P. Române, 1954, **4**, № 5—6, 187—190 (рум; резюме русс., франц.)

Дается элементарное доказательство теоремы о том, что если функция имеет в каждой точке левую и правую производные, то она имеет производную всюду, за исключением, быть может, конечного или счетного множества точек. П. И. Романовский

679. **Суперпозиции функций с ограниченным изменением. Маркус** (Compunerea funcţiilor cu variaţie mărginită. Marcus S.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Române, Sec. mat. şi fiz., 1954, **6**, № 2, 243—250 (рум.; резюме русс., франц.)

Изучаются свойства суперпозиции $\psi(x) = f[\varphi(x)]$, где ψ и φ — функции с ограниченным изменением. В частности, изучаются строение множества точек дифференцируемости ψ и свойства ψ при различных частных предположениях о f и φ. Рассмотрения автора связаны с исследованиями Н. К. Бари и Д. Е. Меньшова по аналогичному вопросу. П. И. Романовский

680. **Функции с ограниченным вторым изменением. Харшиладзе Ф. И.**, Тр. Тбилис. матем. ин-та, 1954, **20**, 145—156

Пусть $f(x)$ — действительная измеримая функция на сегменте $[a, b]$. Назовем полным вторым изменением этой функции величину

$$V(f; 2; a, b) = \lim_{n\to\infty} \sup_{x_k} \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta^2 f(x_k, x_{k+1})|,$$

где

$$\Delta^2 f(x_k, x_{k+1}) = f(x_k) + f(x_{k+1}) - 2f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right).$$

Если $V(f; 2; a, b) < \infty$, то f называется функцией ограниченным вторым изменением. Доказывается, что такая функция может иметь разве лишь счетное множество точек разрыва, причем первого рода.

Даются развернутые доказательства результатов автора (Докл. АН СССР, 1951, **79**, 201—204), гласящих, что если для периодической с периодом 2π функции f $V(f; 2; a, b) < \infty$, то для того чтобы f была непрерывной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий при $n\to\infty$: 1) $\lim \frac{1}{n^2} \Sigma_{k=1}^{n} k^2 \rho_k = 0$, 2) $\lim \frac{1}{\ln n} \Sigma_{k=1}^{n} \rho_k = 0$, где $\rho_k = (a_k^2 + b_k^2)^{1/2}$ (a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции f). Соотношения 1) и 2) в общем случае неравносильны. В. К. Дзядык

681. **О повторных интегралах. Пхакадзе Ш. С.**, Тр. Тбилис. матем. ин-та, 1954, **20**, 167—209

Изучается вопрос о возможности перемены порядка интегрирования в двукратном повторном интеграле от характеристических функций плоских множеств. Рассматриваются следующие классы плоских множеств:

B_0^x — класс всех множеств, пересекающихся с каждой прямой, параллельной оси OX, по открытому или замкнутому множеству; B_0^{xy} (B_1^{xy}) — класс всех множеств, пересекающихся с каждой прямой, параллельной оси OX или оси OY, по открытому или замкнутому множеству (по множеству типа F_σ или G_σ). Известный пример Серпинского показывает, что эти классы содержат неизмеримые множества.

В первой и третьей главах доказывается, что перестановка порядка интегрирования в двукратном повторном интеграле возможна для характеристических функций множеств $M \in B_0^{xy}$ и, при некоторых добавочных условиях, для характеристических функций множеств $M \in B_0^x$. При гипотезе континуума показывается, что упомянутая перестановка, вообще говоря, невозможна для характеристических функций множеств $M \in B_1^{xy} \cap B_0^x$.

Во второй главе, имеющей вспомогательный характер, изучаются верхние и нижние интегралы Лебега и аппроксимативные пределы ограниченных функций, верхние и нижние повторные (в обычном и сильном смыслах) интегралы от ограниченных функций в прямоугольнике, повторные (в обычном и сильном смыслах) интегралы от ограниченных функций в прямоугольнике, внутренняя мера Каратеодори (являющаяся аналогом внешней меры Каратеодори). П. И. Романовский

3682. **Выражение двойным интегралом площади поверхности, заданной в полярных координатах. Костовский А. Н.**, Укр. матем. ж., 1954, **6**, № 4, 398—404

Рассматривается поверхность S, заданная в полярных координатах уравнением $\rho = f(\alpha, \beta)$, где $f(\alpha, \beta)$ — непрерывная функция α, β на прямоугольнике $I_0 = [\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2;\ \beta_1 \leqslant \beta \leqslant \beta_2]$, причем $0 \leqslant \alpha_1$, $\alpha_2 < \pi/2$; $0 \leqslant \beta_1$, $\beta_2 < 2\pi$ и $0 < m \leqslant f(\alpha, \beta) \leqslant M$.

Лебеговой площадью поверхности S называется

$$L(f, I_0) = \inf \{\varliminf_{n\to\infty} L(P_n, I_0)\},$$

где нижняя грань взята по всем последовательностям полиэдров $\{P_n\}$, сходящимся к S, а $L(P_n, I_0)$ — площадь полиэдра P_n.

Доказывается теорема: Для того чтобы площадь поверхности $\rho = f(\alpha, \beta)$, где $f(\alpha, \beta)$ — функция ограниченной вариации по Тонелли (Сакс С., Теория интеграла, М., 1949, гл. V, § 4), выражалась двойным интегралом

$$\iint_{I_0} f \sqrt{f^2 \cos^2\alpha + (\partial f/\partial\alpha)^2 \cos^2\alpha + (\partial f/\partial\beta)^2}\, d\alpha d\beta,$$

необходимо и достаточно, чтобы функция $f(\alpha, \beta)$ была абсолютно непрерывной в смысле Тонелли на прямоугольнике I_0. Для этого, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы площадь $L(f, I)$ была абсолютно непрерывной функцией прямоугольника $I \subset I_0$.

Аналогичная теорема доказана Тонелли (Сакс С., там же, гл. V, § 8) для поверхности $z = f(x, y)$, определенной на прямоугольнике. Г. Я. Поплавская

3683. **Длина, форма и площадь. Штейнхаус** (Length, shape and area. Steinhaus H.), Colloq. math., 1954, **3**, № 1, 1—13 (англ.)

Дается обзор важнейших результатов, связанных с утверждением Крофтона, вводится несколько новых понятий и ставятся вопросы, которые можно считать за целую программу исследований.

Пусть O — фиксированная точка и OQ — фиксированное направление на плоскости. Определим для данного ϑ ($0 \leqslant \vartheta < \pi$) ось OT так, что $\angle QOT = \vartheta$, и на оси OT точку P так, что $OP = p$, и проведем через P перпендикуляр к OT; получим взаимно однозначное соответствие между точками (ϑ, p) полосы $s = \{0 \leqslant \vartheta < \pi;\ -\infty < p < \infty\}$ и прямыми L плоскости. Пусть A — плоская кривая и $a(\vartheta, p)$ — число точек пересечения A с прямой $L(\vartheta, p)$, соответствующей точке (ϑ, p). Теорема Крофтона сводится к равенству

$$\text{дл. } A = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\pi} a(\vartheta, p)\, d\vartheta\, dp,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега. Суммируемость $a(\vartheta, p)$ равносильна спрямляемости кривой A.

Автор приводит аналогичное утверждение для сферы с идентифицированными диаметрально противоположными точками. Поставим в соответствие каждой большой окружности ее идентифицированные полюсы и примем за образ жордановой кривой C кривую D, образованную точками, соответствующими большим окружностям, касательным к C; получим инволюцию между кривыми (исследованную впервые Сантало) со свойствами: дл. C = пл., ограниченной D; дл. D = пл., ограниченной C.

Затем дается метод практического измерения длин плоских кривых, опирающийся на утверждение Крофтона, и показывается, как этот метод можно применить для измерения длин объектов переменной ширины, например, реки на карте масштаба 1 : 100 000. Далее

обращается внимание на парадокс длины, связанный с тем, что всякий раз аккуратные измерения длин кривых, встречающихся в природе, не дают в общем сходящегося процесса.

В связи с этим предлагается ввести «длину порядка m», определяемую равенством Крофтона, в котором функция $a(\vartheta, p)$ заменяется усеченной функцией $a^{(m)}(\vartheta, p)$, где $a^{(m)} = a$, если $a \leqslant m$, и $a^{(m)} = m$, если $a > m$. Допускаются к сравнению «длины» неспрямляемых кривых: отношение длин двух кривых определяется как предел отношения длин порядка m при $m \to \infty$.

Автор вводит понятие расстояния между кривыми A и B с помощью равенства

$$(A, B) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\pi} |a(\vartheta, p) - b(\vartheta, p)|\, d\vartheta\, dp.$$

Затем определяется понятие наилучшего приближения данной кривой с помощью кривых данного семейства и дается способ количественной оценки степени симметричности кривой C.

Расстояние между A и B разбивается на 2 части. 1-я часть $((A, B)) = \min_{B' \in \{B\}} (A, B')$, где $\{B\}$ означает класс всех кривых, конгруэнтных B, оценивает разницу в форме и обладает свойствами расстояния; другая часть $(A, B) - ((A, B))$ оценивает разницу в положении. Последняя разбивается на часть, соответствующую параллельным переносам, и часть, соответствующую вращениям, и отмечается, что подобным образом можно разбить разницу в форме на часть, соответствующую растяжению или сжатию, и часть, соответствующую чистому искажению.

В заключение автор сопоставляет различные понятия сходимости кривых и ставит некоторые вопросы о связи между ними. A. Götz

3684. О поверхностях без касательных плоскостей. **Альда Вацлав,** Чехосл. матем. ж., 1953, 3 (78), № 2, 154—157 (русс., резюме англ.)

Исправляется ошибочное утверждение, приведенное в работе Сакса (Saks S., Ann. Math., 1933, **34**, 114—124). В ней вводилось пространство U непрерывных функций точек единичного квадрата K_0, удовлетворяющих еще другим условиям, которое является при введенной в нем норме пространством Банаха. При помощи теоремы Бэра доказывалось, что функции, определяющие поверхности без касательной плоскости в каждой внутренней точке K_0, образуют в пространстве U резидуальное подмножество (т. е. дополнение к множеству 1-й категории). Доказательство основывалось на следующем утверждении: Множество U_2 функций $z = u(x, y)$ в пространстве U, для которых в каждой внутренней точке (x, y) квадрата K_0 при $t \to 0$

$$\underline{\lim}\, |t^{-1}[u(x + t\cos\theta,\ y + t\sin\theta) - u(x, y)]| < \infty$$

для всех θ, за исключением множества не выше первой категории, образует в пространстве U резидуальное подмножество.

При доказательстве этого утверждения Сакс разбивает для каждого n квадрат K_0 на n^2 одинаковых взаимно непересекающихся квадратов K_i^n $(i = 1, \ldots, n^2)$. Внутри каждого квадрата K_i^n берется конечное число кругов C_{ij}^n $(j = 1, \ldots, s_n)$ так, чтобы имело место

(S_1) для любой точки $(x_0, y_0) \in K_i^n$ и любого интервала (θ_1, θ_2), $-\pi/2 \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant \pi/2$, $\theta_2 - \theta_1 \geqslant n^{-1}$, существует такое j $(1 \leqslant j \leqslant s_n)$, что

$$\operatorname{tg}\theta_1 \leqslant (x - x_0)/(y - y_0) \leqslant \operatorname{tg}\theta_2$$

для любой точки $(x, y) \in C_{ij}^n$. Доказывается, что это условие невыполнимо. С несколько видоизмененным доказательством приводится теорема:

Пусть U_3 — множество тех $u \in U$, для которых почти во всех $(x, y) \in K_0$ при $t \to +0$

$$\underline{\lim}\, |t^{-1}[u(x + t\cos\theta,\ y + t\sin\theta) - u(x, y)]| < \infty$$

для всех θ, за исключением множества не выше первой категории. Тогда U_3 будет резидуальным подмножеством в пространстве U. М. А. Мертвецов

3685. Граничные функции классов $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}$ и $H_p^{*(r_1,\ldots,r_n)}$. **Аманов Т. И.,** Изв. АН СССР, сер. матем., 1955, **19**, № 1, 17—32

Граничной функцией класса $H_p^{(r_1, \ldots, r_n)}$ автор называет функцию этого класса, не принадлежащую $H_p^{(r_1', \ldots, r_n')}$ при $r_i' - r_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $\Sigma_1^n (r_i' - r_i) > 0$. Для $H_p^{*(r_1, \ldots, r_n)}$ определение аналогично.

Указываются примеры граничных функций классов $H_p^{(r_1, \ldots, r_n)}$ и $H_p^{*(r_1, \ldots, r_n)}$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ и с их помощью доказывается результат относительно теоремы вложения, опубликованный ранее (РЖМат, 1953, 150).

А. А. Конюшков

3686. О компактности систем почти периодических функций Б. Левитана. **Коваленко А. С.,** Доповіді та повідомлення Львівськ. ун-ту, 1953, № 4, ч. 2, 57

Формулируются следующие теоремы:

I. Система $\{f(x)\}$ N-почти периодических (N-п. п.) функций компактна в смысле равномерной сходимости на любом конечном интервале, если выполнены следующие условия.

Как бы мало ни было число $\varepsilon > 0$ и велико число N:

1) существует число $M = M(N)$ такое, что для всех функций $f(x)$ системы выполняется неравенство

$$|f(x)| < M, \quad |x| < N;$$

2) существует относительно плотное множество почти периодов $\tau = \tau(\varepsilon, N)$, общих всем функциям системы, причем если $\tau_1 = \tau_1(\varepsilon, N)$, $\tau_2 = \tau_2(\rho, N)$, то $\tau_1 \pm \tau_2$ есть общий почти период, принадлежащий $\varepsilon + \lambda(\rho)$, где $\lambda(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$.

II. Есть $f(x)$ если N-п. п. функция и $\{k_d\}$ — произвольное относительно плотное множество действительных чисел, то из бесконечной последовательности $f(x + k_d)$ $(d = 1, 2, \ldots)$ можно выбрать подпоследовательность $f(x + k_{d_i})$ $(i = 1, 2, \ldots)$, равномерно сходящуюся на любом конечном интервале.

Примечание референта. Компактность N-п. п. функций изучалась ранее Б. Я. Левиным (Укр. матем. ж., 1949, 1, № 1, 49—101).

Б. М. Левитан

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

3687. Между арифметикой и теорией множеств. **Ваи Хао** (Between number theory and set theory. Wang Hao), Math. Ann., 1953, **126**, № 5, 385—409 (англ.)

Рассматривается связь между формализованной арифметикой и теорией множеств.

G — система аксиом для теории множеств, состоящая из аксиомы объемности, аксиомы существования конечных множеств (утверждающей, что для любых множеств x и y существует множество $x + \{y\}$) и аксиомы выделения. G' — система, которая получается присоединением к G аксиомы фундирования, подстановки

сиом о существовании множества-суммы и множества ех подмножеств данного множества и аксиомы выбо-. Z — система аксиом формализованной арифметики ксиомы равенства, аксиомы Пеано и рекурсивные ределения для $+$ и.).

В § 1 средствами G строится двуместный предикат E, средством которого в более широкой системе нуме-ются все множества общей счетной модели для G G'. С помощью этого предиката вводятся одноместная ункция E, пересчитывающая все эти множества, и ксиома ограничения» (limitation).

ALG. Для каждого множества x существует натураль-е число m такое, что $x = E(m)$. (В символике автора LG есть $(x)\,L(x)$).

G^* — система $G + \mathrm{ALG}$. В G^* доказуемы все аксиомы . Система G^* категорична относительно содержащейся ней арифметики, т. е. любые две модели для G^* зоморфны, если изоморфны их части, относящиеся к рифметике, содержащейся в G^*.

L-перегод любого предложения из G или G' полу-ается путем ограничения области изменения всех еременных классом $\hat{x}\,L(x)$ и соответствующим изме-ением кванторов. Непротиворечивость G^* относительно устанавливается доказательством того, что L-перевод аждой теоремы G^* доказуем в G. G' есть система ермело — Френкеля с аксиомой выбора, но без аксиомы есконечности. P' — система Бернайса с аксиомой вы-ора, но без аксиомы бесконечности (РЖМат, 1954, 4328). на получается присоединением к G' схемы предика-ивного образования классов (т. е. для каждого преди-ата G' в P' содержится соответствующий класс) и тношения принадлежности η между множествами G' классами P'.

В § 2 с помощью пересчета всех классов, существо-ание которых доказуемо в P', в Z определяется ариф-етический предикат $\eta^*(m, n)$ (имеющий место между n и n, если соответствующие объекты в P' находятся отношении η). Показывается, что если к Z присоеди-ить аксиомы, характеризующие η^*, то P' допускает ффективный перевод в полученную систему. Доказы-ается нерекурсивность η^*. В P' выразим предикат $R(X, m)$, аналогичный $E(x, m)$, но он содержит свя-анные классовые переменные и поэтому не удается оказать в P, что R может служить для пересчета сех классов P'. Для каждых постоянных чисел m и n ожно доказать

$$R(X, n)\,\&\,R(Y, n) \supset X = Y,\quad \exists X R(X, n),$$

$$E(m)\,\eta\,R(n) \equiv m\eta^*n^*$$

(X, Y — переменные), но для переменных m и n этого оказать не удается.

В § 3 показывается, что если к системе P (относя-щейся к G, как P' к G') присоединить правило беско-ечной индукции, позволяющее переходить от теорем $H(0)$, $H(1)$, ..., доказанных без этого правила, к но-вой теореме $(m)\,H(m)$, то станут выводимы аксиомы, характеризующие η^*, а также последние предложения предыдущего абзаца с переменными m и n. P^* полу-чается присоединением к P аксиом ALG и ALP (по-следняя утверждает, что для каждого класса X суще-ствует натуральное число m такое, что $X = R(m)$). Q — система, получающаяся добавлением к P правила бразования классов для всевозможных предикатов P не обязательно из G). Доказывается, что система, полу-ченная присоединением к P^* остальных аксиом P', переводима в Q. Устанавливается, что в Q формали-уемо доказательство непротиворечивости P. Показы-вается, что если ограничиваться ω-непротиворечивыми моделями, то P^* категорично относительно содержа-щейся в ней арифметики. Рассматриваются некоторые неразрешимые предложения системы P^*. В заключение показывается ω-непротиворечивость всякой модели, каждый объект которой обозначен некоторым термом данной системы. А. С. Есенин-Вольпин

3688. Теорема о непрерывных отображениях упорядоченных множеств. Серпинский (Un théorème concernant les fonctions continues dans les ensembles ordonnés. Sierpiński W.), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon. math.), 1951, 24, № 2, 175—180 (журнал вышел из печати в 1954 г.) (франц.)

Доказывается теорема: Каждое отображение f счетного упорядоченного множества X в упорядоченное множество произвольной мощности Y является пределом последовательности непрерывных отображений X в Y (непрерывность определяется с помощью последовательностей: f непрерывно в точке $x \in X$, если для любой последовательности $\{x_i\}$, сходящейся к x, последовательность $\{f(x_i)\}$ сходится к $f(x)$). Теорема остается верной, если под Y понимать любое топологическое пространство. Ю. М. Смирнов

3689. О многозначных соответствиях. Курепа (Sur les correspondances multivoques. Kurepa Georges), C. r. Acad. sci., 1953, 237, № 19, 1133—1135 (франц.)

Многозначное отображение $f: A \to B$ называется (r, s)-отображением, если для любой точки $x \in A$ множество $f(x)$ имеет мощность r, а для любой точки $y \in fA$ множество $f^{-1}(y)$ имеет мощность s.

Доказывается следующее обобщение теоремы Ф. Бернштейна:

Если существуют (r, s)-отображения $A \to B$ и $B \to A$, то множества A и B равномощны. Если A и B конечны, то $r = s$.

Приводится одно комбинаторно-топологическое применение этого результата. М. М. Постников

3690. Верхняя и нижняя границы порядковых типов. Душник (Upper and lower bounds of order types. Dushnik Ben), Michigan Math. J., 1953—1954, 2, № 1, 27—31) (англ.)

Отношение $\alpha \leqslant \beta$ означает, что упорядоченное множество A типа α подобно подмножеству упорядоченного множества B типа β. Если при этом B не подобно никакому подмножеству множества A, то пишут $\alpha < \beta$. Порядковый тип γ называется наименьшей верхней границей порядковых типов α и β, если $\alpha \leqslant \gamma$, $\beta \leqslant \gamma$, и для каждого δ такого, что $\alpha \leqslant \delta$ и $\beta \leqslant \delta$, либо $\gamma \leqslant \delta$, либо γ и δ несравнимы (т. е. не имеет места ни $\gamma \leqslant \delta$, ни $\delta \leqslant \gamma$) (аналогично определяется наибольшая нижняя граница).

В работе дается метод доказательства теоремы: Пусть $\alpha = \omega \cdot r + m$, $\beta = \omega \cdot s + n$, где r и s — натуральные числа, а m и n — неотрицательные целые числа. Тогда α и β^* имеют только конечное число различных наименьших верхних границ, а именно, все порядковые типы вида

$$n + \omega^* \cdot b_1 + \omega \cdot a_1 + \cdots + \omega^* b_t + \omega \cdot a_t + m, \qquad (1)$$

где t и коэффициенты $a_1, \ldots, a_t, b_1, \ldots, b_t$ являются натуральными числами, за исключением b_1 и a_t, которые могут быть и нулями, причем $\Sigma_1^t a_i = r$, $\Sigma_1^t b_i = s$. Сумма (1) при $m = n = 0$ называется смешанной суммой порядковых типов α и β^*.

Сначала рассматриваются свойства смешанных сумм и их отношение к порядковым типам. При помощи этих свойств доказывается, что если α и β — предельные порядковые числа $< \omega^2$, то смешанная сумма α и β^* есть наименьшая верхняя граница α и β^*. Из доказательства этого утверждения можно получить доказательство вышеуказанной теоремы.

Далее доказывается, что если α и β — трансфинитные

порядковые числа, то α и β^* не имеют наибольшей нижней границы.

В работе имеются опечатки. Например, стр. 28, строка 4 сверху, напечатано $C=\gamma$, $D=\delta$ вместо $\overline{C}=\gamma$, $\overline{D}=\delta$; стр. 29, строка 11 сверху, напечатано $i=j$ вместо $i\neq j$; стр. 30, строки 8, 9, 10, следует заменить C_{2k-1} на C_{2k}, а C_{2k} — на C_{2k+1}. З. И. Козлова

3691. Взаимозависимость между теоремами кратной отделимости. Козлова З. И., Уч. зап. Сталингр. гос. пед. ин-та, 1953, № 3, 17—41

Цель статьи — «систематизация ряда вопросов, связанных с кратной отделимостью, в первую очередь — выяснение взаимной зависимости теорем кратной отделимости».

Приводится ряд теорем о взаимной зависимости аксиом кратной отделимости и из них выводятся новые теоремы о кратной отделимости.

Далее приводится четкая схема взаимной связи теорем кратной отделимости. Указывается, что из 69 известных к моменту опубликования статьи теорем кратной отделимости (соответственно неотделимости) B-множеств, A-множеств и CA-множеств независимого доказательства требуют лишь 8 теорем. Остальные следуют из этих восьми и из теорем о взаимной зависимости аксиом кратной отделимости. В. Я. Арсенин

3692. Пример двух множеств типа G_δ, арифметическая сумма которых неизмерима B. Содномов Б. С., Докл. АН СССР, 1954, 99, № 4, 507—510

Ранее (Докл. АН СССР, 1951, 80, № 2, 173—175) автор доказал, что арифметическая сумма двух B-множеств может быть A-множеством, неизмеримым B.

В реферируемой работе дается способ построения двух множеств типа G_δ, арифметическая сумма которых есть A-множество, неизмеримое B.

Попутно доказано, что арифметическая сумма множества типа G_δ и замкнутого множества может быть A-множеством, неизмеримым B. Автор указывает, что не всякое A-множество может быть получено как арифметическая сумма двух B-множеств. В. Я. Арсенин

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

3693. О коэффициентах рядов Фурье — Данжуа. Чжэнь Цзянь-гуан (當若阿—富理埃級數的係數. 陳建功), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1954, 4, № 3, 263—278 (кит.; резюме англ.)

Для данного $0<\delta<1/2$ строится несуммируемая на $[0, 2\pi]$ функция $f(x)$, обладающая свойствами: а) $f(x)$ абсолютно непрерывна на $(\varepsilon, 2\pi)$, где $0<\varepsilon<2\pi$; б) $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{2\pi} f(x)\,dx$ существует; в) $\int_0^{2\pi} f(x)\frac{\cos}{\sin} nx\,dx = o(n^{-\delta})$.

В качестве примера такой функции автор приводит функцию $f(x)=x^{-1}\cos(x^{-\alpha})$, где $\alpha>(2\delta)/(1-2\delta)$. А. Г. Джваршейшвили

3694. О пределах неопределенности частных сумм тригонометрических рядов. Меньшов Д., Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon. math.), 1952, 25, 323—337 (журнал вышел из печати в 1953 г.)

Дается добавление к результатам предыдущей работы автора (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1950, 32). Основная теорема такова.

Пусть измеримые функции $G(x)$ и $F(x)$ удовлетворяют неравенству $G(x)\leqslant F(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$ ($G(x)$ и $F(x)$ могут равняться $+\infty$ или $-\infty$ на множествах положительной меры). Тогда можно построить тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, такой, что для последовательности $\{S_n(x)\}$ его частных сумм функции $F(x)$ и $G(x)$ являются соответственно верхним и нижним пределами по мере на $[-\pi, \pi]$ и для любой возрастающей последовательности натуральных чисел n_k, $k=1, 2, \ldots$, выполняются неравенства

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} S_{n_k}(x)\leqslant G(x)\leqslant F(x)\leqslant \overline{\lim}_{k\to\infty} S_{n_k}(x)$$

почти всюду на $[-\pi, \pi]$.

См. также последующие работы автора (РЖМат, 1955, 668, 669). Н. К. Бари

3695. К теории сингулярных интегралов. Шун М. С., Уч. зап. Харьковск. ун-та, 1952, 40, 143—145 (журнал вышел из печати в 1954 г.)

Рассматривается класс U_1 функций $f(t)$, заданных на $[a, b]$ и имеющих только разрывы 1-го рода, причем

$$f(t)=\alpha f(t-0)+\beta f(t+0)\ (\alpha, \beta>0, \alpha+\beta=1)$$

Вводится интеграл

$$I_n(f, x)=\int_a^b f(t)\,d_t\,\Phi_n(t, x),$$

где $\Phi_n(t, x)$ как функции t имеют ограниченные вариации.

Чтобы для всякой $f\in U_1$ и любого $x\in(a, b)$ было

$$\lim_{n\to\infty} I_n(f, x)=f(x),$$

необходимо и достаточно, чтобы при $\delta_i>0\,(i=1, 2)$ и $[x-\delta_1, x+\delta_2]\subset[a, b]$ было

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{Var}\Phi_n(t, x)\Big|_{x-\delta_1}^{x-0}=\alpha,$$

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{Var}\Phi_n(t, x)\Big|_{x+0}^{x+\delta_2}=\beta.$$

Этот критерий применяется для доказательства расходимости интерполяционного процесса Фейера в классе функций ограниченной вариации.

Изложение настолько неотчетливо, что референт не может признать результаты автора доказанными. И. П. Натансон

3696. О суммировании двойных тригонометрических рядов методом Римана. Джваршейшвили А. Г., Тр. Тбилис. матем. ин-та, 1954, 20, 157—166

В реферируемой статье обобщаются результаты К. К. Гахария (Матем. сб., 1951, 28 (70), 337—350). Приведем некоторые из доказанных теорем.

Пусть дан двойной тригонометрический ряд

$$\sum_0^\infty\sum_0^\infty A_{mn}(x, y), \tag{1}$$

где

$$A_{mn}(x, y)=a_{mn}\cos mx\cos ny+b_{mn}\sin mx\cos ny+$$
$$+c_{mn}\cos mx\sin ny+d_{mn}\sin mx\sin ny.$$

Ряд (1) суммируем методом R_λ ($\lambda\geqslant 1$) к значению s в точке (x_0, y_0), если

$$\lim_{(u,v)_\lambda\to 0}\frac{\Delta^2 F(x_0, y_0, 2u, 2v)}{16u^2v^2}=s,$$

где

$$F(x, y)=\sum_1^\infty\sum_1^\infty\frac{A_{mn}(x, y)}{m^2n^2}-\frac{x^2}{2}\sum_1^\infty\frac{A_{0n}(x, y)}{n^2}-$$
$$-\frac{y^2}{2}\sum_1^\infty\frac{A_{m0}(x, y)}{m^2}+\frac{A_{00}x^2y^2}{4},$$

а $(u, v)_\lambda\to 0$ означает, что $(u, v)\to(0, 0)$ и при этом $1/\lambda\leqslant|u/v|\leqslant\lambda$.

Теорема 1. Если (1) является рядом Фурье суммируемой функции $f(x, y)$, то почти всюду в $R_0=$

$= (0 < x < 2\pi,\ 0 < y < 2\pi)$ $s_{mn}(x, y) = o(\lg m)$ (n фиксировано) и $s_{mn}(x, y) = o(\lg n)$ (m фиксировано), где $s_{mn}(x, y)$ — частная сумма ряда (1).

Теорема 3. Если (1) является рядом Фурье некоторой суммируемой функции и почти всюду в R_0 при $m, n \to \infty$ $s_{mn}(x, y) \to s(x, y)$, то ряд (1) почти всюду в R_0 суммируем методом R_λ к $s(x, y)$.

Теорема 4. Пусть двойной ряд (1) почти всюду в R_0 суммируем методом R_λ к функции $f(x, y)$. Если

$$\sup_{m,n} \{|a_{mn}|, |b_{mn}|, |c_{mn}|, |d_{mn}|\} < B < \infty$$

и семейство интегралов

$$\left\{\iint_e \frac{\Delta^2(F, x, y, 2u, 2v)}{16u^2v^2}\,dx\,dy\right\}$$

равностепенно абсолютно непрерывно, то (1) является рядом Фурье функции $f(x, y)$.

Поэтому, если условия теоремы 4 выполнены и ряд (1) суммируется методом R_λ почти всюду в R_0 к нулю, то

$$a_{mn} = b_{mn} = c_{mn} = d_{mn} = 0 \quad (m, n = 0, 1, \ldots).$$

В статье имеются опечатки. Например: стр. 161, строка 8 сверху, напечатано $f(x, y, \tau)$, должно быть $f(x, y + \tau)$; стр. 161, строка 12 сверху, напечатано $J_1(x, y)$ вместо $J_3(x, y)$; стр. 162, строка 13 снизу, напечатано $\to \infty$ вместо $\to 0$. П. Л. Ульянов

3697. Сходящийся метод приближения непрерывных функций, для случая неравноотстоящих узлов, при помощи обобщенных полиномов. Миракьян Г. М., Сб. Матем. отд. физ.-матем. фак. Одесск. ун-та, 1953, **5**, 27—32

Несколько более подробное изложение результатов статьи автора (РЖМат, 1953, 1147). А. Ф. Тиман

3698. О полиномах С. Н. Бернштейна ограниченных функций двух переменных. Ипатов А. Ф., Уч. зап. Карело-Финск. ун-та, 1954, **3**, № 4, 16—51

Рассматриваются многочлены

$$B_{n,m}(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} f(i/n,\ k/m)\, T_{i,n}(x)\, T_{k,m}(y),$$

где $T_{i,n}(x) = C_n^i x^i (1 - x)^{n-i}$, а $f(x, y)$ — функция, заданная в рациональных точках единичного квадрата. На эти многочлены распространяются теоремы, которые для одномерного случая были доказаны Херцогом и Хиллом (Herzog F., Hill J. D., Amer. J. Math., 1946, 68, № 1, 109—124). Приводится ряд специфически «двумерных» примеров, иллюстрирующих полученные результаты.

И. П. Натансон

3699. Обобщение неравенств С. Н. Бернштейна и А. А. Маркова. Барин К., Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, **18**, № 2, 159—176

Приводятся полные доказательства результатов, опубликованных автором ранее (РЖМат, 1953, 1142). Кроме того, доказано: если $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, $-\infty < a < a' < b' < b < \infty$, то

$$\|T_n\|_{L^q(a', b')} \leqslant C(a, a', b', b) n^{1/p - 1/q} \|T_n\|_{L^p(a, b)},$$

где T_n — тригонометрический полином порядка n.

Доказано, что в смысле порядка все оценки автора точны. С. М. Лозинский

3700. Об асимптотическом поведении функций Лебега некоторых методов суммирования рядов Чебышева. Абрамов Л. М., Докл. АН СССР, 1954, **98**, № 2, 173—176

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на $[-1, 1]$ и $S_n(f; x)$ — частная сумма ее ряда Фурье—Чебышева

$$S_n(f; x) = \sum_0^n c_k T_k(x),$$

где $T_0(x) = \sqrt{1/\pi}$, $T_k(x) = \sqrt{2/\pi} \cos k \arccos x$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Пусть

$$\sigma_{n,p}(f; x) = (p + 1)^{-1} \sum_{k=0}^{p} S_{n-k}(f; x).$$

Полиномы $\sigma_{n,p}(f; x)$ аналогичны полиномам Валле—Пуссена для тригонометрических рядов Фурье. Рассматривается функция Лебега этого метода суммирования:

$$L_{n,p}(x) = \sup_{|f(x)| \leqslant 1} |\sigma_{n,p}(f; x)|.$$

Доказывается, что для всех $x \in [-1, 1]$

$$L_{n,p}(x) = \frac{4}{\pi^2}\left\{\ln \frac{1 + ny}{1 + (p + 1)y} + |\cos ny| \ln \frac{y + (p+1)^{-1}}{y + n^{-1}}\right\} + O(1),$$

где $y = \arccos x$ и $O(1)$ при $n \to \infty$ — величина, равномерно ограниченная относительно x, n и p $(0 \leqslant p \leqslant n)$. Этот результат получен ранее С. М. Никольским (Изв. АН СССР, сер. матем., 1940, **4**, 509) для $x = \pm 1$ и А. Ф. Тиманом (Докл. АН СССР, 1948, **61**, № 6, 989) для случая $p = 0$.

В формулировке основных результатов работы (формулы (7) и (15)) допущены опечатки. В частности, из формулы (15) не следует формула (7). И. Г. Соколов

См. также: 3587, 3666, 3737

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

3701. Об одном возможном обобщении теоремы Хейльбронна — Ландау. Бороздин К. В., Докл. АН СССР, 1954, **98**, № 5, 705—707

Доказывается теорема: Пусть ряд $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ имеет действительные коэффициенты и радиус сходимости, равный единице, и пусть функция $f(z)$ в области, граница которой в окрестности точки $z = 1$ имеет уравнение $r = 1 - |\varphi|^\beta$ $(\beta \geqslant 1,\ z = re^{i\varphi})$, удовлетворяет условию $f(z) = O(|1 - z|^{-\alpha})$, $0 \leqslant \alpha < 1$. Тогда из оценки снизу $a_n \geqslant -\gamma n^\delta$ $(\gamma > 0,\ 0 \leqslant \delta < 1)$ вытекает оценка сверху $a_n \leqslant \Gamma n^{\delta + 1/\beta}$, где Γ — константа. Эта теорема является в некотором смысле обобщением теоремы Хейльбронна—Ландау (Heilbronn H., Landau E., Math. Z., 1933, **37**, 17), утверждающей, что если коэффициенты степенного ряда имеют конечную нижнюю грань и сумма ряда является ограниченной в секторе $0 \leqslant r < 1$, $|\varphi| \leqslant \lambda$, то коэффициенты имеют и конечную верхнюю грань.

А. Ф. Леонтьев

3702. К вопросу о полноте системы функций $\{f(\lambda_n z)\}$. Лохин И. Ф., Матем. сб., 1954, **35 (77)**, № 2, 215—222

Устанавливается полнота системы функций $\{f(\lambda_n z)\}$ в области, отличной от круга и определяемой индика-

трисой роста целой функции $f(z)$. Используя формулу обобщающую формулу Карлемана

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{r_\nu^p}-\frac{r_\nu^p}{R^{2p}}\right)\cos\theta_\nu p = \frac{p}{\pi R^p}\int_{-\pi/(2p)}^{\pi/(2p)}\ln|f(Re^{i\theta})|\cos p\theta\,d\theta + \frac{p}{2\pi}\int_r^R\left(\frac{1}{\rho^{2p}}-\frac{1}{R^{2p}}\right)\rho^{p-1}\ln\left|f\left(\rho e^{i\frac{\pi}{2p}}\right)f\left(\rho e^{-i\frac{\pi}{2p}}\right)\right|d\rho+A,$$

где A — ограниченная величина при $R\to\infty$, функция $f(z)$ регулярна в области $r\leqslant|z|\leqslant R$, $|\arg z|\leqslant\pi/(2p)$, $p>1/2$, и $a_\nu=r_\nu e^{i\theta_\nu}$, $\nu=1,2,\ldots,n$ — нули $f(z)$, лежащие внутри этой области, автор доказывает следующую теорему единственности:

Если функция $f(z)$ — регулярная в угле $|\arg z|\leqslant\pi/(2p)$, $p>1/2$, порядка p, нормального типа, с индикатрисой роста $h(\varphi)$ — обращается в нуль внутри угла в точках a_ν, $|\theta_\nu|<\pi/(2p)$, удовлетворяющих условию

$$h\left(\pm\frac{\pi}{2p}\right)<\frac{\pi}{p}\varlimsup_{R\to\infty}\frac{\sum_{r_\nu<R}(r_\nu^{-p})\cos p\theta_\nu}{\ln R},$$

то $f(z)\equiv 0$.

При помощи этой теоремы и критерия полноты системы функций в пространстве L_2 доказывается теорема:

Если $f(z)$ — целая функция порядка $p>1/2$, нормального типа, с индикатрисой роста $h(\varphi)$ и отличными от нуля тейлоровскими коэффициентами, то система функций $\{f(\lambda_n z)\}$ полна в области переменного $z=re^{i\theta}$, определяемой неравенством

$$r^p h[\pm\pi/(2p)+\theta]<\pi\gamma_p,$$

где

$$\gamma_p=\frac{1}{p}\varlimsup_{R\to\infty}\frac{\sum_{|\lambda_\nu|<R}|\lambda_\nu|^{-p}\cos p\vartheta_\nu}{\ln R},\quad \lambda_\nu=|\lambda_\nu|e^{i\vartheta_\nu}.$$

Из этой теоремы выводится ряд частных случаев, например, полнота системы $\{e^{\lambda_n z}\}$, $|\arg\lambda_n|<\pi/2$, в полосе $|\operatorname{Im} z|<\pi\gamma_1$.

Последний результат при положительных λ_n дает признак Карлемана полноты системы степеней. Используя одну теорему А. Ф. Леонтьева, автор доказывает теорему:

Если $\varphi(z)=\sum_0^\infty b_n z^n$ — целая функция порядка $p>1/2$, нормального типа и такая, что функция $\psi(z)=\sum_{n=0}^\infty b_n\Gamma(n/p+1)z^{-n}$ имеет все свои особенности только на отрезке $[0,1]$, то система функций $\{\varphi(\lambda_n z)\}$ полна в области, определяемой неравенствами $r^p|\sin p\theta|<\pi\gamma_p$, $|\theta|<\pi/p$.

М. Г. Хапланов

3703. Свойства полных систем в пространствах аналитических функций. Евграфов М. А. Докл. АН СССР, 1954, 98, № 5, 717—718

Рассматривается пространство $\mathfrak{A}(\Phi, D)$ аналитических функций, представимых в виде

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(L)}\Phi(z\zeta)f(\zeta)\,d\zeta,$$

где а) D — ограниченная односвязная область, содержащая начало координат, дополнение которой CD до полной плоскости также односвязно; б) $\Phi(z)=\sum_{k=0}^\infty z^k/m_k$ — целая функция с отличными от нуля коэффициентами; в) $f(\zeta)$ — произвольная функция, аналитическая вне D, и $L\in CD$, причем под сходимостью последовательности $\{F_n(z)\}$ в $\mathfrak{A}(\Phi, D)$ понимается равномерная сходимость $\{f_n(z)\}$ во всякой замкнутой части $C\overline{D}$.

Пусть $\varphi_n(z)=\sum_{k=0}^\infty a_{n,k}z^k$ $(n=0,1,\ldots)$ — последовательность функций, принадлежащих $\mathfrak{A}(\Phi, D)$. Для нее строится система функций $\psi_n^{(\Phi)}(z)=\sum_{k=0}^\infty\alpha_{n,k}z^k/m_k$, $n=0,1,\ldots$, где $\|\alpha_{n,k}\|$ — матрица, транспонированная к обратной по отношению к матрице $\|a_{n,k}\|$.

Формулируется теорема:

Для того чтобы любая функция $F(z)\in\mathfrak{A}(\Phi, D)$ могла быть разложена (и притом единственным образом) в ряд по функциям системы $\{\varphi_n(z)\}$ в смысле топологии $\mathfrak{A}(\Phi, D_1)$, $D_1\subset D$, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum_0^\infty\varphi_n(z)\psi_n^{(\Phi)}(\zeta)$ сходился к $\Phi(z\zeta)$ при $z\in D_1$, $\zeta\in D$, причем равномерно в $\mathfrak{A}(\Phi, \overline{D_1})$ при $\zeta\in\overline{D}_\alpha\subset D$ и равномерно в $\mathfrak{A}(\Phi, \overline{D})$ при $z\in\overline{D}_\beta\subset D_1$.

Доказательства не приводятся. Чтение затруднено из-за допущенных неточностей. Например, не оговорено, что даже формально не всегда заданную матрицу можно представить в виде произведения двух треугольных (а если возможно, то при формальном подходе такое представление неоднозначно) и не всегда для треугольной матрицы можно построить обратную.

М. Г. Хапланов

3704. Об одной интерполяционной задаче для целых функций. Лохин И. Ф., Матем. сб., 1954, 35 (77), № 2, 223—230

Проблема представления целой функции $\varphi(z)$ первого порядка нормального типа по заданным моментам $A_n=(2\pi i)^{-1}\int_L[\psi(\zeta)]^n\Phi(\zeta)\,d\zeta$ решена А. О. Гельфондом (Успехи матем. наук, 1937, № 3, 144—174).

Используя частный случай обобщенного преобразования Бореля, автор получает результаты, являющиеся распространением соответствующих результатов А. О. Гельфонда на произвольные целые функции.

Теорема 1. Пусть $\varphi(z)$ — целая функция и пусть заданы числа

$$A_n=(2\pi i)^{-1}\int_L[\psi(\zeta)]^n\Phi(\zeta)\,d\zeta,\quad n=0,1,2,\ldots,$$

где $\Phi(z)$ — функция, ассоциированная с $\varphi(z)$ посредством целой функции $F(z)$; $\psi(z)$, $\psi(0)=0$, $\psi'(0)=1$, — регулярная и однолистная функция в односвязной области D; контур L содержится внутри D и содержит внутри себя все особенности $\Phi(z)$. Тогда для $\varphi(z)$ имеет место представление

$$\varphi(z)=(2\pi i)^{-1}\int_L L[\psi(\zeta)]\frac{\psi'(\zeta)}{\psi(\zeta)}F(z\zeta)\,d\zeta,$$

где $L(u)=\sum_0^\infty A_n u^{-n}$.

Теорема 2 (Теорема единственности). При выполнении всех условий теоремы 1, если числа $A_n=0$, $n=0,1,2,\ldots$, то $\varphi(z)\equiv 0$.

Теорема 3. Пусть выполнены все условия теоремы 1 и функция $\psi(z)$ отображает область D на круг. Тогда для функции $\varphi(z)$ имеет место разложение в интерполяционный ряд

$$\varphi(z)=\sum_0^\infty A_n P_n(z),\qquad(1)$$

где

$$P_n(z)=\frac{1}{n!}\left\{\frac{d^n}{d\zeta^n}\left[\frac{\psi'(\zeta)\zeta^{n+1}}{[\psi(\zeta)]^{n+1}}F(z\zeta)\right]\right\}_{\zeta=0}.$$

Если $\psi(z)$ отображает область D не на круг, то ряд (1) вообще расходится.

Доказывается, что его можно просуммировать к $\varphi(z)$, если $\psi(z)$ отображает D на область, звездообразную относительно начала координат.

В заключение приводится теорема о разложении целой функции в ряд по полиномам. Я. И. Поляков

3705. К теории однолистных функций. Рахманов Б. Н., Докл. АН СССР, 1954, **97**, № 6, 973—976

Приводятся 8 теорем, доказываемых, по указанию автора, на основании следующих соображений. Пусть $v = \omega(u;\ a)$ $(\alpha < u < \beta;\ \alpha_1 < a < \beta_1)$ есть уравнение семейства кривых, зависящих от параметра a, обладающего тем свойством, что через каждую конечную точку некоторой конечной или бесконечной области G проходит только одна кривая семейства. Если функция $w = f(z)$, аналитическая в круге $|z| < 1$, отображает круг $|z| \leqslant 1$ на область, граница которой Γ полностью расположена в G, причем так, что уравнения $u + iv = f(e^{i\varphi})$ $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$ и $v = \omega(u;\ a)$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между значениями параметров a и φ, то функция $f(z)$ однолистна в круге $|z| < 1$.

Уравнение семейства можно также брать в виде $\rho = \rho(\psi - \theta)$ (θ — параметр), беря уравнение кривой Γ в виде $\rho e^{i\psi} = f(e^{i\varphi})$. В этом случае для однолистности $f(z)$ в круге $|z| < 1$ достаточно существования взаимно однозначного соответствия между значениями параметров θ и φ. Из приведенных теорем 6 относятся к отображениям единичного круга на однолистные области, не содержащие бесконечно удаленной точки, а две — к отображениям единичного круга на однолистные области, содержащие бесконечно удаленную точку.

Условимся называть областями видов D_{px}, $D_{p\theta}$ и D_{rk} такие области, которые содержат точку $w = 0$, не содержат точки $w = \infty$ и обладают следующими свойствами: 1) для любой точки M границы области вида D_{px}, не лежащей на оси u, существует такое a, что ветвь параболы $v = \sqrt{2p(u - a)}$ (p — постоянное) проходит через точку M и дуга этой ветви от оси u до точки M полностью принадлежит данной области; 2) для любой точки M границы области вида $D_{p\theta}$ существует такое θ, что ветвь параболы $\rho \sin^2(\psi - \theta) = 2p\cos(\psi - \theta)$ (p—постоянное) проходит через эту точку, а дуга этой ветви от начала координат до точки M полностью лежит в данной области; 3) существует такой круг с центром в начале координат плоскости w, что каждая точка M границы области вида D_{rk} лежит на некоторой касательной к окружности этого круга, причем отрезок касательной от точки M до точки касания с окружностью принадлежит к данной области. Функции, отображающие круг $|z| \leqslant 1$ на области видов D_{px}, $D_{p\theta}$ и D_{rk}, предполагаются нормированными условиями $f_i(0) = 0$, $f_i'(0) = 1$, $i = 1, 3, 4$, непрерывными в обобщенном смысле (с учетом бесконечно удаленной точки) в $|z| \leqslant 1$, обращающимися в ∞ в некоторой точке окружности $|z| = 1$ и аналитическими всюду в $|z| \leqslant 1$, за исключением конечного числа граничных точек.

Теорема 1. Для того чтобы функция $w = f_1(z)$ была однолистна в $|z| < 1$ и отображала круг $|z| \leqslant 1$ на область вида D_{px}, необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{Im} f_1(z) \operatorname{Re} z f_1'(z) + p \operatorname{Im} z f_1'(z) \geqslant 0$$

при $p > 0$ и при всех $z = e^{i\varphi}$ $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$, за исключением конечного числа точек.

Теорема 3. Для того чтобы функция $w = f_3(z)$ была однолистна в $|z| < 1$ и отображала круг $|z| \leqslant 1$ на область вида $D_{p\theta}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{Re}\left(\sqrt{2}\sqrt{p^2 + |f_3(z)|^2} + i\sqrt{p\sqrt{p^2 + |f_3(z)|^2} - p^2}\right) + \frac{z f_3'(z)}{f_3(z)} \geqslant 0$$

при $p > 0$ и при всех $z = e^{i\varphi}$ $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$, за исключением конечного числа точек.

Теорема 4. Для того чтобы функция $w = f_4(z)$ была однолистна в $|z| < 1$ и отображала единичный круг на область вида D_{rk}, необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{ir}{\sqrt{|f_4(z)|^2 - r^2}}\right)\frac{z f_4'(z)}{f_4(z)} \geqslant 0$$

при $r > 0$ и при всех $z = e^{i\varphi}$ $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$, за исключением конечного числа точек.

Условимся называть областью вида D'_{drk} область, дополнением к которой служит область вида D_{rk}. Отображающая функция $F_1(z)$ принадлежит классу Σ, если

$$w = F_1(z) = z^{-1} + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots$$

Теорема 7. Для того чтобы функция $w = F_1(z) \in \Sigma$ была однолистна в $|z| < 1$ и отображала единичный круг на область вида D'_{drk}, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие, аналогичное условию теоремы 4 с заменой $\geqslant 0$ на $\leqslant 0$.

Автор отмечает, что указанным им методом можно получить и другие аналогичные признаки однолистности аналитических в $|z| < 1$ функций, а также, что признаки теорем 3 и 4 являются обобщениями известного признака звездности аналитической в $|z| \leqslant 1$ функции $w = f(z)$. В. А. Зморович

3706. Однолистные функции, близкие к выпуклым. Каплан (Close-to-convex schlicht functions. Kaplan Wilfred), Michigan Math. J., 1952, 1, № 2, 169—185 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Функция $f(z)$, аналитическая в $|z| < R$, называется функцией, близкой к выпуклой в $|z| < R$, если в $|z| < R$ существует аналитическая и однолистная функция $\varphi(z)$, отображающая $|z| < R$ на выпуклую область и удовлетворяющая условию $\operatorname{Re}\{f'(z)/\varphi'(z)\} > 0$ в $|z| < R$. В дальнейшем в работе рассматривается область $|z| < 1$.

Доказано:

1. Каждая функция, близкая к выпуклой, является однолистной в $|z| < 1$.

2. Для того чтобы функция $f(z)$, аналитическая в $|z| < 1$ и имеющая там не обращающуюся в нуль производную, была функцией, близкой к выпуклой, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{Re}\left\{1 + re^{i\theta}\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right\} d\theta > -\pi$$

для $\theta_1 < \theta_2$, $r < 1$.

Отсюда следует наглядная геометрическая характеристика границы образа круга $|z| < r$, $0 < r < 1$, при отображении этого круга функцией, близкой к выпуклой.

3. Функции $f(z)$, близкие к выпуклым, имеют интегральное представление

$$f'(z) = e^{h(z)}\left\{\int_0^{2\pi} K(z, \theta)\, d\psi(\theta) + i\alpha\right\},$$

где

$$h'(z) = z^{-1}\left\{\int_0^{2\pi} K(z, \theta)\, d\chi(\theta) + i\beta - 1\right\},$$

$K(z, \theta) = (e^{i\theta} + z)/(e^{i\theta} - z)$, $\psi(\theta)$, $\chi(\theta)$ — неубывающие вещественные функции на $[0, 2\pi]$, α, β — вещественные константы.

4. Пусть

$$c[f]=\inf_{\varphi}\left\{\sup_{|z|<1}|\arg f'(z)-\arg\varphi'(z)|\right\},$$

где $f(z)$ — функция, аналитическая в $|z|<1$, имеющая в этом круге производную, не обращающуюся в нуль; φ пробегает класс всех аналитических, выпуклых, однолистных в $|z|<1$ функций; аргументы функций $\varphi'(z)$ и $f'(z)$ выбраны надлежащим образом. Тогда

$$c[f]=\min\left\{\frac{1}{2}\sup[P(r,\theta_1)-P(r,\theta_2)],\pi\right\},$$

где

$$P(r,\theta)=\arg f'(re^{r\theta})+\theta,$$

а точная верхняя граница берется по r, θ_1, θ_2; $\theta_1<\theta_2$, $r<1$.

Рассматриваются некоторые примеры.

Автором показано, что некоторые известные классы функций являются подклассами функций, близких к выпуклым. Рассматриваются также некоторые новые подклассы. Например, доказано, что функция

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K(z,\theta)\,h(\theta)\,d\theta$$

является функцией, близкой к выпуклой, если $h(\theta)$, не являясь константой, не убывает в $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ и не возрастает в $\pi\leqslant\theta\leqslant2\pi$.

Этот результат обобщается на некоторые неаналитические отображения. Ю. Д. Максимов

3707. Теорема искажения однолистных функций. Ху Кэ (關於單葉函數的偏差定理. 胡克), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1954, 4, № 2, 259—262 (кит.; резюме англ.)

Дается некоторое обобщение результатов Г. М. Голузина (Матем. сб., 1951, 29 (71), 197—208) и Шаха.

Пусть $F(\xi)=\xi+\sum_1^\infty\alpha_{2n}\xi^{-2n+1}$ регулярна и однолистна в области $1<|\xi|<\infty$. Тогда, если

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n}a_{\mu,\nu}x_\mu x_\nu\geqslant0,$$

$$\left|\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n}b_{\mu,\nu}\log\frac{F(\xi'_\mu)-F(\xi''_\nu)}{\xi'_\mu-\xi''_\nu}\cdot\frac{\xi'_\mu+\xi''_\nu}{F(\xi'_\mu)+F(\xi''_\nu)}\right|^2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\mu,\mu'=1}^{m}c'_{\mu,\mu'}\log\frac{\xi'_\mu\overline{\xi}'_{\mu'}+1}{\xi'_\mu\overline{\xi}'_{\mu'}-1}\times$$

$$\times\sum_{\nu,\nu'=1}^{n}c''_{\nu,\nu'}\log\frac{\xi''_\nu\overline{\xi}''_{\nu'}+1}{\xi''_\nu\overline{\xi}''_{\nu'}-1},$$

$$\left|\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n}b_{\mu,\nu}\log\frac{F(\xi'_\mu)^2-F(\xi''_\nu)^2}{\xi'^2_\mu-\xi''^2_\nu}\right|^2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\mu,\mu'=1}^{m}c'_{\mu,\mu'}\log\left(1-\frac{1}{\xi'^2_\mu\overline{\xi}'^2_{\mu'}}\right)\times$$

$$\times\sum_{\nu,\nu'=1}^{n}c''_{\nu,\nu'}\log\left(1-\frac{1}{\xi''^2_\nu\overline{\xi}''^2_{\nu'}}\right),$$

где $m\geqslant n$, $b_{\mu,\nu}=a_{\mu,\nu}\gamma'_\mu\gamma''_\nu$, $c'_{\mu,\mu'}=a_{\mu,\mu'}\gamma'_\mu\overline{\gamma}'_{\mu'}$, $c''_{\nu,\nu'}=a_{\nu,\nu'}\gamma''_\nu\overline{\gamma}''_{\nu'}$, γ, ξ — любые комплексные числа $c|\xi|>1$. Г. Г. Шлионский

3708. О функциях p-листных в среднем. Гу и Шэн (關於平均p葉函數•龔昇), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1954, 4, № 2, 245—257 (кит.; резюме англ.)

Регулярная функция $f(z)=\sum_0^\infty c_nz^n$, $|z|<1$, называется p-листной в среднем, если площадь части $w(R)$ римановой поверхности этой функции, проектирующейся в круг $|w|\leqslant R$, удовлетворяет неравенству $w(R)\leqslant p\pi R^2$ для любого $R>0$.

Класс таких функций, введенный Литлвудом (1924), обозначается $\overline{S}_p$. В реферируемой статье приводятся некоторые новые результаты для $f(z)=\sum_p^\infty c_nz^n\in\overline{S}_p$.

Теорема 1. При $\lambda>0$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z)|^\lambda\,d\theta\leqslant\lambda p\int_0^r\frac{M^\lambda(\rho)}{\rho}\,d\rho,$$

где $z=re^{i\theta}$, $M(\rho)=\max_{|z|=\rho}|f(z)|$.

Равенство имеет место только для функций вида $f(z)=az^p$, где $a=\text{const}$.

Теорема 2. При $q\geqslant1$, $\lambda>1/q-1$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z)|^\lambda|f'(z)|\,d\theta\leqslant\frac{p}{r}\sqrt{\frac{2q(1+\lambda)-2}{e}}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{1}{1-r}M^{2/q}(\sqrt{r})\int_0^r\frac{M(\rho)^{2\lambda+2-2/q}}{\rho}\,d\rho}.$$

Теорема 3. Если для $0<|z|<1$

$$|f(z)|\leqslant M|z|^p/(1-|z|)^\alpha$$

при постоянных M и α, $\alpha>1/2$, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f'(re^{i\theta})|\,d\theta\leqslant M_0/(1-r)^\alpha,$$

где M_0 зависит только от M, p, α.

Теоремы 2 и 3 обобщают результаты Голузина, полученные им для однолистных функций.

Теорема 4. Если $f(z)=z+\cdots\in\overline{S}_1$, то $f(z)$ однолистна в круге $|z|<r_0=0{,}756\ldots$, где r_0 — положительный корень уравнения $1-r^2-r^3=0$.

Следствие 1. Если $f(z)=z+\cdots\in\overline{S}_1$, то $f(z)$ выпукла в круге $|z|<(2-\sqrt{3})r_0=0{,}196\ldots$

Следствие 2. Если $f(z)=z+\cdots\in\overline{S}_1$, $|f''(0)/2!|\leqslant(4r_0-2)/r_0=1{,}354\ldots$, то образ круга $|z|<1$ $\{w=f(z)\}$ покрывает круг $|w|<1/4$. В. Н. Телиянц

3709. Некоторые результаты, относящиеся к экстремальной длине. Дженкинс (Some results related to extremal length. Jenkins James A.), Contributions to the theory of Riemann surfaces, Princeton, N. J., 1953, 87—94 (англ.)

Метод экстремальной длины в форме $\int_\gamma\rho\,|dz|\geqslant1$, $1/\lambda=$

$=\inf\iint_G\rho^2dxdy$ или $\iint_G\rho^2dxdy\leqslant1$, $\lambda^{1/2}=\sup\int_\gamma\rho\,|dz|$

(см. приложение Шиффера М. к книге Куранта Р., Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности, М.—Л., Изд-во иностр. лит-ры, 1953) обычно приводит к экстремальной метрике и се-

мейству линий $\{\gamma\}$, однолистно покрывающих область G. Известно, что экстремальная длина является конформным инвариантом. Автор на двух ранее рассмотренных примерах (Polya G., Ann. Math., 1933, **34**, 617—620; Schiffer M., Quart. J. Math., 1946, **17**, 197—213) показывает, как с помощью метода экстремальной длины может быть установлено экстремальное распределение при неоднолистном аналитическом отображении. Дается также обобщение метода на семейства $\{\gamma\}$, где γ состоит из конечного числа кривых.

Л. И. Волковыский

3710. Еще одно замечание к работе «Некоторые проблемы конформного отображения». Дженкинс (Another remark on «Some problems in conformal mapping». Jenkins James A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 6, 978—981 (англ.)

В предыдущих работах (Trans. Amer. Math. Soc., 1949, **67**, 327—350; Proc. Amer. Math. Soc., 1952, **3**, 147—151) автор установил, что для всякой трехсвязной области D существуют трехсвязные подобласти D', имеющие то же топологическое расположение, что и D, и не допускающие никаких сохраняющих топологическое расположение конформных отображений в D, кроме тождественного отображения.

В реферируемой заметке ставится следующий вопрос: даны трехсвязная область D и ее трехсвязная подобласть D', имеющая то же топологическое расположение; существует ли конформное отображение D' в D, сохраняющее топологическое расположение и переводящее один из контуров D' в соответствующий контур D? На этот вопрос дается отрицательный ответ. Доказательство проводится методом экстремальной длины.

С. А. Гельфер

3711. Определение констант интеграла Кристоффеля — Шварца при гидромеханическом расчете двухшпунтового флютбета. Фильчаков П. Ф., Укр. матем. ж., 1954, **6**, № 4, 463—475

В случае двухшпунтового флютбета составляются трансцендентные уравнения для определения постоянных интеграла Кристоффеля — Шварца при отображении области движения на верхнюю полуплоскость и рассматривается метод последовательных приближений решения этих уравнений. Для выбора начальных приближений разрабатывается специальный метод, наиболее быстро приводящий к цели (РЖМат, 1954, 2100). На числовых примерах показывается быстрая сходимость последовательных дриближений. Г. Н. Положий

3712. Замечания о второй гармонической мере Уллемара. Одзава (Remarks on Mr. Ullemar's second harmonic measure. Ozawa Mitsuru), Kôdai Math. Sem. Repts, 1953, № 3, 93—96 (англ.)

Пусть G— область, ограниченная конечным числом жордановых кривых Γ, E — замкнутое множество точек на Γ и $E' = \Gamma - E$. Пусть F — класс гармонических в G функций $u(z)$, удовлетворяющих условиям: a) $u(z) = 0$ на E', b) $D_G(u) = \iint_G (u_x^2 + u_y^2)dxdy \leqslant \pi$. Тогда $\Omega(\zeta, E, G) = \sup u(\zeta)$ называется второй гармонической мерой (это несколько измененное определение Уллемара; см. Ullemar L., Arkiv mat., 1952, **2**, № 6, 87—97). Пусть далее F_E — класс гармонических в G функций $u(z)$, удовлетворяющих условиям: a') = a), b') $D_G(u) < \infty$ и c') $u(\zeta) = 1$ для фиксированной точки $\zeta \in G$. Нахождению Ω соответствует определение функции $u(z) \in F_E$, для которой достигается $\inf D_G(u)$ на F_E. Для F_E строится воспроизводящее ядро (такая функция $\hat{K}_G(z, \zeta)$ области, что $D_G[u(z), \hat{K}_G(z, \zeta)] = u(\zeta)$), с помощью которого явно решается вторая, а с нею и первая экстремальные задачи. Доказательство существования Ω для более общих областей проводится путем их исчерпания и двух «принципов расширения области», соответствующих рассмотрению $E(E')$ в качестве идеальной границы области; для второго принципа $(\Omega(z, E, G) \leqslant \leqslant \Omega(z, E, G_1)$, если $G \subset G_1$ и $E = E_1)$ приводятся два доказательства, одно — в основном по Уллемару, другое — с помощью формулы Адамара для вариации функции Грина.

Л. В. Волковыский

3713. Об интеграле типа Коши. Карцивадзе И. Н., Хведелидзе Б. В. (კოშის ტიპის ინტეგრალის შესახებ ქარცივაძე ი., ხვედელიძე ბ.), თბილისის მათემატიკის ინსტიტუტის საქ. სსრ მეცნიერებათა აკადემია. (Тр. Тбилис. матем. ин-та АН ГрузССР), 1954, **20**, 211—244 (груз.; резюме русс.)

Изучается интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_k} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}, \qquad (1)$$

когда контур интегрирования $C = \sum_1^\infty C_k$ представляет собой счетную совокупность гладких замкнутых и разомкнутых кривых C_k. Налагая на контур C и функцию $\varphi(t)$ определенные условия, обеспечивающие равномерную и абсолютную сходимость ряда (1) в произвольной области $G(\overline{G} \cap \overline{C} = 0)$, авторы устанавливают некоторые свойства рассматриваемого интеграла. В частности, установлено поведение функции $\Phi(z)$ в окрестности C и на бесконечности.

Далее авторы доказывают формулу обращения

$$\int_C \frac{dt}{t-x}\int_C \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - t} = -\pi^2\varphi(x),\ x \in C,$$

когда C состоит из замкнутых непересекающихся кривых, и решают в явном виде интегральное уравнение

$$a(x)\varphi(x) + \frac{b(x)}{\pi i}\int_C \frac{\varphi(t)\,dt}{t-x} = f(x),\ x \in C,$$

где $a(x) = a_k$, $b(x) = b_k$ при $x \in C_k$, причем a_k, b_k — постоянные.

Наконец, дано решение граничной задачи, состоящей в отыскании аналитической функции $\Phi(z)$ по заданному скачку на C $\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t)$.

Д. А. Квеселава

3714. Решение плоской задачи Дирихле. Дзин (Risoluzione del problema piano di Dirichlet. Zin Giovanni), Ann. mat. pura ed appl., 1953, **35**, 203—254 (итал.)

В §§ 1, 2 гл. I содержатся результаты, очевидным образом вытекающие из свойств интеграла Пуассона — Лебега и свойств конформного отображения круга на область, ограниченную спрямляемой кривой.

В § 3 гл. I рассматривается разложение решения задачи Дирихле (при определенных ограничениях на область и граничную функцию) в ряд по ортогональной системе функций. Аналогичный вопрос при более сильных ограничениях рассматривается в гл. II для сопряженной гармонической функции. В гл. III изучается вопрос об условиях, при которых интегрируема в квадрате функция $d\theta/dt$, где $z = z(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$,— параметрическое уравнение спрямляемой простой замкнутой кривой C, причем функция $z(t)$ выбрана абсолютно непрерывной; θ — точка единичной окружности, соответствующая точке $z \in C$ при конформном отображении на круг. Условие интегрируемости $(d\theta/dt)^2$ есть как раз то условие, которое в § 3 гл. I и в гл. II накладывается на область.

С. Я. Хавинсон

3715. Ортогональные гармонические полиномы. Гарабедян (Orthogonal harmonic polynomials. Garabedian P. R.), Pacif. J. Math., 1953, 3, № 3, 585—603 (англ.)

Определяются полные ортонормированные системы гармонических полиномов для двух семейств эллипсоидов трехмерного пространства, называемых соответственно растянутыми и сжатыми. Скалярное произведение определяется при этом двояко:

$$(f, g) = \iiint \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g \, dv,$$

$$[f, g] = \iiint fg \, dv.$$

При помощи этих систем автор решает экстремальную задачу: среди гармонических функций в эллипсоиде определить ту, для которой достигает максимума следующий функционал:

$$[f_z, f_z] / (f, f),$$

определяя собственные функции и собственные числа, соответствующие этой задаче.

Для тех же областей вычисляются соответствующие ядерные функции (кернфункции). С. Н. Мергелян

3716. Интерполяционная задача для гармонических функций. Уолш (An interpolation problem for harmonic functions. Walsh J. L.), Amer. J. Math., 1954, **76**, № 1, 259—272 (англ.)

Пусть H — множество гармонических в единичном круге функций $u(z) = a_0/2 + \sum_1^\infty r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$, для которых $\sum_1^\infty (a_n^2 + b_n^2) < \infty$, и пусть C — единичная окружность; норма функции $u(z) \in H$ определена равенством

$$\|u\|^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [u(e^{i\theta})]^2 \, d\theta = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_1^\infty (a_n^2 + b_n^2).$$

Если $|\alpha| < 1$, то существует единственная функция $f_\alpha(z)$ из H, которая имеет наименьшую норму и $f_\alpha(\alpha) = 1$.

Теорема 1. Если $u(z) \in H$, то при $|\alpha| < 1$

$$u(\alpha) = \int_C u(z) f_\alpha(z) \, |dz| \Big/ \int_C f_\alpha(z) \, |dz|. \qquad (1)$$

Вычисляя функцию $f_\alpha(z)$, автор показывает, что (1) есть формула Пуассона для гармонической функции.

Теорема 2. Если при всяком n функция $\psi_n(z) \in H$ имеет наименьшую норму и

$$\psi_n(\alpha_0) = \psi_n(\alpha_1) = \ldots = \psi_n(\alpha_{n-1}) = 0, \ \psi_n(\alpha_n) = 1,$$

где $\{\alpha_n\}$ — точки внутри C, то система $\{\psi_n(z)\}$ ортогональна на C.

Всякой функции $u(z) \in H$ и последовательности $\{\alpha_n\}$ с помощью формул

$$u(\alpha_0) = a_0\psi_0(\alpha_0), \ u(\alpha_1) = a_0\psi_0(\alpha_1) + a_1\psi_1(\alpha_1), \ldots \qquad (2)$$

соответствует интерполяционный ряд

$$a_0\psi_0(z) + a_1\psi_1(z) + \ldots + a_n\psi_n(z) + \ldots \qquad (3)$$

Автор доказывает, что это есть ряд Фурье функции $u(z)$ по ортогональной системе $\{\psi_n(z)\}$.

В реферируемой статье решаются две интерполяционные задачи: 1) выразить значения функции $u(z) \in H$ через ее значения в точках $\{\alpha_n\}$; 2) определить все функции $u(z)$ из H, для которых $u(\alpha_n) = A_n$.

Для существования функции $u(z) \in H$, удовлетворяющей условиям $u(\alpha_n) = A_n$, необходимо и достаточно чтобы $\sum_0^\infty a_n^2 \|\psi_n\|^2 < \infty$, где a_n определяются из формул (2). При этом ряд (3) сходится равномерно внутри единичного круга и в среднем на C к функции $u_0(z)$, имеющей наименьшую норму по сравнению со всеми функциями, удовлетворяющими условиям $u(\alpha_n) = A_n$. При решении первой задачи используется представление $u(z) = u_0(z) + u_1(z)$, где $u_1(z)$ равна нулю в точках $\{\alpha_n\}$; так как $u_1(z)$ ортогональна ко всем функциям системы $\{\psi_n(z)\}$, то $\|u\|^2 = \|u_0\|^2 + \|u_1\|^2$. Аналогично, сумма $u_0(z) + u_1(z)$, где $u_1(z)$ — любая функция, ортогональная к системе $\{\psi_n(z)\}$, есть решение задачи.

Рассматривается вопрос о полноте системы $\{\psi_n(z)\}$, а также случай вещественных и случай кратных точек α_n. П. К. Суетин

3717. Задача Лэмба при смешанных граничных условиях. Свекло В. А., Докл. АН СССР, 1954, 95, № 4, 737—739

Дается решение задачи об определении упругих потенциалов в однородной упругой полуплоскости $y < 0$ при следующих условиях: когда $t < 0$, среда считается покоящейся, а в момент $t = 0$ в начале координат $x = y = 0$ действует мгновенный импульс $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} \neq 0$. Предполагается, что при $t > 0$ на границе полуплоскости выполнены условия: $\tau_{xy} = 0$, $\sigma_y = 0$ при $x > 0$, при $x < 0$ $v = 0$.

Под сосредоточенным мгновенным воздействием подразумевается, как обычно, предельный случай непрерывно распределенной нагрузки. Задача сводится к определению двух аналитических в верхней полуплоскости функций по некоторым соотношениям между их производными на границе области. И. Н. Карцивадзе

3718. О приближенном решении граничных задач теории функций комплексного переменного. Манджавидзе Г. Ф., Сообщ. АН ГрузССР, 1953, **14**, № 10, 577—582

Исследуется следующая краевая задача.

Пусть простой гладкий замкнутый контур L делит плоскость на конечную область D^+ и дополнительную область D^-. Определить кусочноаналитический вектор $\Phi(z) = \{\Phi_1(z), \ldots, \Phi_n(z)\}$, удовлетворяющий краевому условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + f(t), \qquad (1)$$

где $f(t)$ — вектор, $G(t)$ — матрица, заданные на L, удовлетворяющие условию Гёльдера соответственно с показателями ν, ν_1 ($\nu_1 > \nu$), причем $\det G(t) \neq 0$.

Рассматривается пространство H_n^ν векторов $F = \{F_1, \ldots, F_n\}$ с нормой

$$\|F\| = \max \|F_k\| \quad (k = 1, \ldots, n), \ \|F_k\| = \max |F_k(t)| + \sup \frac{|F(t_1) - F(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\nu}.$$

Доказывается, что в пространстве H_n^ν можно построить последовательность краевых задач

$$\Phi^+(t) = G_m(t)\,\Phi^-(t) \qquad (2)$$

так, чтобы при $m \to \infty$ $G_m(t) \to G(t)$ и $X_m(z) \to X(z)$, где $X_m(z)$, $X(z)$ — канонические матрицы задач (2), (1) соответственно. (Определение канонической матрицы см., например, Векуа Н. П., Системы сингулярных интегральных уравнений, М.—Л., 1950.) Ф. Д. Гахов

3719. Приближенный метод определения напряжений в упругой анизотропной пластинке вблизи от-

верстия, мало отличающегося от кругового. **Лехницкий С. Г.**, Инж. сб., 1953, **17**, 3—28

Развивается приближенный метод решения плоской задачи теории упругости для бесконечной анизотропной пластинки с отверстием, близким к круговому. Контур отверстия задается уравнениями

$$x = a\,[\cos\vartheta + \varepsilon \sum_1^N (\alpha_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta)],$$

$$y = a\,[\sin\vartheta + \varepsilon \sum_1^N (-\alpha_n \sin n\vartheta + \beta_n \cos n\vartheta)],$$

где $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$, ε — малый параметр, α_n, β_n — постоянные, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям.

Разлагая искомые функции Φ_1 и Φ_2, через которые выражаются напряжения и смещения, в ряд по степеням ε и предполагая, что напряжения, приложенные к контуру, также разлагаются в ряд по степеням ε, ограничиваясь конечным числом членов в разложении Φ_1 и Φ_2, автор сводит задачу к хорошо исследованной задаче о равновесии анизотропной пластинки с круговым отверстием, и тем самым определяет приближенное решение исходной задачи.

Вопрос о сходимости приближенных решений не исследован. Указывается, что этот способ применим и к случаю пластинки, ослабленной отверстием, близким к эллиптическому.

Детально разобран случай пластинки с отверстием, имеющим четыре оси симметрии. В качестве примера рассматривается задача о растяжении и об изгибе моментами, действующими в плоскости пластинки, ослабленной отверстием с четырьмя осями симметрии. При этом в некоторых конкретных случаях вычисления доведены до численных результатов. И. Н. Карцивадзе

3720. Об одной обобщенной граничной задаче теории функций комплексного переменного. Векуа Н. П. (კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის ერთი განზოგადებული სასაზღვრო ამოცანის შესახებ. **Векуа Н.** П.), Сообщ. АН ГрузССР, 1954, **15**, № 6, 345—352 (груз.; резюме англ.)

Пусть D^+ — конечная область, ограниченная одним простым замкнутым контуром Ляпунова L, а D^- — бесконечная область, дополняющая $D^+ + L$ до полной плоскости. Пусть далее заданная на контуре L функция $\alpha(t)$ имеет отличную от нуля производную, удовлетворяющую условию Гёльдера, и переводит контур L взаимно однозначно в самого себя с сохранением направления обхода.

При помощи теории сингулярных интегральных уравнений дается решение следующей граничной задачи теории аналитических функций.

Найти кусочноголоморфный вектор $\Phi(z) = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$, имеющий конечный порядок на бесконечности, по граничному условию на L

$$\Phi^+[\alpha(t)] = A(t)\,\Phi^-(t) + B(t)\,\overline{\Phi^-(t)} + g(t),$$

где $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ обозначают граничные значения вектора $\Phi(z)$ на контуре L, соответственно из D^+ и D^-;

$$A(t) = \| A_{kl} \|,\quad B(t) = \| B_{kl} \| \quad (k, l = 1, 2, \ldots, n)$$

— заданные матрицы, удовлетворяющие условию Гёльдера; $g(t) = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ — заданный вектор, также удовлетворяющий условию Гёльдера. Предполагается, что $\det A(t) \neq 0$ всюду на L. Д. А. Квеселава

3721. О смешанных граничных задачах для функций, аналитических в односвязной области. Комацу (On mixed boundary value problems for functions analytic in a simply-connected domain. **Komatu Yûsaku**), J. Math. Soc. Japan, 1953, **5**, № 3—4, 269—294 (англ.)

Рассматривается следующая задача. Найти функцию $f(z) = u(z) + iv(z)$, аналитическую и ограниченную внутри единичного круга $|z| < 1$, когда на некоторых дугах окружности заданы граничные значения действительной части $f(z)$, а на дополнительных дугах — значения мнимой части:

$$u(e^{i\varphi}) = U_j(\varphi),\quad a_j < \varphi < b_j,$$

$$v(e^{i\varphi}) = V_j(\varphi),\ b_j < \varphi < a_{j+1} \quad (j = 1, \ldots, m).$$

Дается интегральная формула для решения этой задачи, а также необходимое и достаточное условие разрешимости; затем выводятся явные формулы для случаев $m = 1$ и $m = 2$.

Полное исследование смешанных граничных задач теории аналитических функций имеется в книге Н. И. Мусхелишвили (Сингулярные интегральные уравнения, М.—Л., 1946, гл. 4). Там же приведена простая формула для решения указанной выше задачи.

И. Н. Карцивадзе, Г. Ф. Манджавидзе

3722. О максимальном члене степенного ряда. Шах, Сингх (The maximum term of an entire series. **Shah S. M., Singh S. K.**), Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1953-54, **A64**, № 1, 80—89 (англ.)

Наиболее характерные результаты:

Пусть $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ — целая функция, $M(r)$ — ее максимум модуля, $\mu(r)$ — максимальный член, $\nu(r)$ — центральный индекс.

1. Пусть $\theta(x)$ удовлетворяет условиям:

$$\theta(x) > 0,\ \theta'(x) \geqslant 0,\ x\theta'(x)/\theta(x) \leqslant c < 1,\ x > x_0;$$

$$\theta(x) \to \infty,\ I(x) = \int_{x_0}^x [t\theta(t)]^{-1} dt \to \infty \text{ при } x \to \infty.$$

Для целой функции $f(z) = \sum_0^\infty [z/I(n)]^n$ имеет место соотношение

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln \mu(r)\,\theta[\ln \mu(r)]}{\nu(r)} = 0,$$

а если выполнено условие $I(n^p) - I(n) \geqslant 2/\theta(n+1)$, то и соотношение

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln M(r)\,\theta[\ln M(r)]}{\nu(r)} = 0.$$

2. Для любой сколь угодно медленно стремящейся к бесконечности функции $\psi(x)$ найдется такая функция нулевого порядка, что $\lim_{r\to\infty} \{\ln M(r)/\nu(r)\,\psi[\nu(r)]\} = 0$.

3. Для любой сколь угодно быстро стремящейся к бесконечности функции $\varphi(x)$ найдется такая функция нулевого порядка, что $\lim_{r\to\infty} \{\ln M(r)/\varphi[\nu(r)]\} = \infty$.

4. Пусть $l(r) = A(\ln_1 r)^{\alpha_1} (\ln_2 r)^{\alpha_2} \ldots (\ln_k r)^{\alpha_k}$, $\ln_{k+1} r = \ln(\ln_k r)$, $\ln_1 r = \ln r$, где $A, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ таковы, что $l(r) \to \infty$ при $r \to \infty$. Если $\ln M(r) \sim l(r) \ln r$, то $\nu(r) \sim (1+\alpha_1)\,l(r)$, и наоборот. М. А. Евграфов

3723. О дефектах мероморфных функций. Гольдберг А. А., Докл. АН СССР, 1954, **98**, № 6, 893—895

Известно, что мероморфная функция может иметь не более чем счетное множество дефектных значений. Для мероморфной функции конечного порядка было известно лишь, что она может иметь сколь угодно большое конечное число дефектных значений (Nevanlinna R., Lethéorème de Picard — Borel et la théorie des fonctions méromorphes, 1929). В реферируемой заметке впервые устанавливается, что произвольное счетное множество точек на комплексной плоскости является множеством дефектных значений для некоторой мероморфной функ-

ции конечного порядка. Далее устанавливается, что по отношению к мероморфной функции рода нуль.

$$f(z) = \Pi_1^{\infty}(1 - z/a_\nu)(1 - z/b_\nu)^{-1}$$

функция

$$\hat{f}(z) = \Pi_1^{\infty}(1 - z/|a_\nu|)(1 - z/|b_\nu|)^{-1}$$

обладает следующими свойствами:

$$\delta(\infty, \hat{f}) \geqslant \delta(\infty, f),\ \delta(0, \hat{f}) \geqslant \delta(0, f).$$

Эти свойства позволяют получить обобщение ряда известных теорем. Например, устанавливается, что для целой функции $g(z)$ порядка ρ, $1 \geqslant \rho \geqslant 1/2$,

$$\sum_{a \neq \infty} \delta(a) \leqslant 1 - \cos(\pi\rho/2).$$

Эта оценка точнее, чем в статье Шаха (Shah S. M., Math. Student, 1944, 12, 67), где была установлена оценка $\delta(a, g) \leqslant \rho$. М. М. Джрбашян

3724. Наложения римановых поверхностей. Фурес (Coverings of Riemann surfaces. Fourès Léonce), Contributions to the theory of Riemann surfaces, Princeton, N. J., 1953, 141—155 (англ.)

Работа является переводом статьи автора (Ann. scient. École norm. supér., 1952, 69, 183—201).

Вводится следующее определение. Пусть t — однозначное непрерывное отображение поверхности S^* на поверхность S, и $t^{-1}(P)$ для $P \in S$ состоит из изолированных точек. Точка $P \in S$ называется покрытой областью $\Delta \subset S^*$, если существует такая окрестность $V(P) \subset S$ точки P, что: 1) $E_{V,\Delta} = \Delta \cap t^{-1}[V(P)]$ не пусто и 2) каждая связная компонента $\Gamma_i \subset E_{V,\Delta}$ отображается посредством t взаимно однозначно на $V(P)$. Если S^* покрывает каждую точку $P \in S$, то (S^*, t) — относительно неразветвленное наложение S. Если вместо 2) имеем: $\Gamma_i \cap t^{-1}(P)$ не пусто и $(\Gamma_i - \Gamma_i \cap t^{-1}(P), t)$ — относительно неразветвленное наложение $V(P) - P$ конечного порядка, то (S^*, t) — относительно разветвленное наложение S. Устанавливается непосредственная связь этого определения со стоиловским. В применении к римановым поверхностям получаются римановы наложения; соответствующие отображения t представляют тогда так называемые римановы проекции. Изучаются их свойства в связи с автоморфизмами аналитических функций.

Пусть (Σ, t) — наложение замкнутой поверхности рода нуль, разветвленное над конечным числом точек, и T — соответствующее топологическое дерево. Два узла T называются эквивалентными, если существует гомеоморфное отображение T на себя, переводящее их друг в друга. Если узлы T состоят только из конечного числа классов эквивалентных узлов, то T называется регулярно разветвленным. Доказывается, что каждой поверхности Σ, которая может быть представлена регулярно разветвленным топологическим деревом, в котором все многоугольники имеют лишь конечное число сторон, можно поставить в соответствие замкнутую поверхность Σ_0 и отображение π, $\Sigma \to \Sigma_0$ так, что (Σ, π) — регулярное наложение Σ_0, разветвленное над конечным числом точек. Даются приложения к римановым поверхностям. Рассматривается также связь между автоморфизмами аналитических функций и топологическими деревьями.

В основе доказательств лежат геометрические методы, не связанные с конформными отображениями.

Л. И. Волковыский

3725. О влиянии сближения алгебраических точек ветвления римановой поверхности на порядок роста отображающей мероморфной функции. Гольдберг А. А., Докл. АН СССР, 1954, 98, № 5, 709—711

Известная теорема Данжуа — Карлемана — Альфорса утверждает: мероморфная функция $w = f(z)$, отображающая плоскость $|z| < \infty$ на риманову поверхность F, имеющую n прямо критических точек, имеет порядок роста не ниже среднего типа порядка $n/2$ (с некоторым ограничением при $n = 1$). В реферируемой заметке вводится класс критических точек (K-точек), более широкий, чем класс прямо критических точек, для которых все еще остается верной указанная выше теорема, причем для отнесения некоторой критической точки к K-точкам надо рассмотреть лишь некоторую ее окрестность. Так, например, если ε-окрестность критической точки $\mathfrak{A}$ над a односвязна и функция $w = g(\zeta)$ отображает круг $|\zeta| < 1$ на эту окрестность, то для того чтобы $\mathfrak{A}$ была K-точкой, необходимо и достаточно, чтобы функция $[g(\zeta) - a]/\varepsilon$ не была произведением Бляшке. Даются критерии. В теореме 6 опечатка: должно быть $\rho \geqslant (n+1)/2$. Л. И. Волковыский

3726. О проблеме типа римановых поверхностей. Пфлюгер (Über das Typenproblem Riemann'scher Flächen. Pfluger Albert), Comment. math. helv., 1953, 27, № 4, 346—356 (нем.)

Если $\{F_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ — обычное исчерпание открытой римановой поверхности F и M_n — модуль кольцевой области $(F_n - \overline{F_0}; \Gamma_0, \Gamma_n)$, где Γ_n — граница F_n, то, как известно (РЖМат, 1954, 2106), условие $M_n \to \infty$ эквивалентно параболичности F. Пусть теперь K — бесконечный комплекс когерентно ориентированных многоугольников σ^2, представляющих разбиение F, σ^1 — произвольно ориентированные стороны K, σ^0 — вершины K. Сторонам σ_k^1 относятся положительные числа g_k, и для каждого «кольца» (k_0, k_n) монотонного исчерпания $\{k_n\}$ комплекса K определяются два числа: модуль $\mu_n = \min \Sigma g_k^{-1} x_k^2$ по всевозможным одномерным формам $X^1 = \Sigma_{k=1}^{\infty} x_k \sigma_k^1$ (x_k — действительные числа) таким, что граница $\partial X^1 = 1$ для $\sigma_k^0 \in k_0$ и $\partial X^1 = 0$ для внутренних вершин (k_0, k_n), и комодуль $\overline{\mu}_n = \min \Sigma g_k x_k^2$ по X^1 таким, что кограница $\delta X^1 = 1$ для $\sigma_k^2 \in k_0$ и $\delta X^1 = 0$ для многоугольников, принадлежащих (k_0, k_n) ($\delta\sigma_k^1 = \sigma_i^2 - \sigma_j^2$, где σ_i^2, σ_j^2 примыкают к σ_k^1). При подходящем выборе g_k, связанном с построением некоторого дифференциала для каждого многоугольника K, имеет место неравенство $\mu_n \leqslant M_n \leqslant \overline{\mu}_n$, где M_n — модуль (k_0, k_n), следовательно, условие $\mu_n \to \infty$ достаточно, а условие $\overline{\mu}_n \to \infty$ необходимо для параболичности F. При некоторых условиях пределы μ_n и $\overline{\mu}_n$ одновременно конечны или бесконечны (выбор g_k производится в основном по Ройдену (Royden H. L., Trans. Amer. Math. Soc., 1952, 73, № 1, 40—94), где дано достаточное условие для гиперболичности F, эквивалентное ограниченности $\overline{\mu}_n$).

Л. И. Волковыский

3727. Построение параболических римановых поверхностей с помощью общего принципа отражения. Каплан (Construction of parabolic Riemann surfaces by the general reflection principle. Kaplan Wilfred), Contributions to the theory of Riemann surfaces, Princeton, N. J., 1953, 103—106 (англ.)

Пусть функция $w = f(z)$ аналитична в области D, ограниченной открытой кривой C, уходящей обоими концами в ∞, и $\nu = \operatorname{Im}[f(z)]$ имеет на C постоянное значение k. Если функция $z = \varphi(t)$ конформно отобра-

жает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} t > 0$ на D, то $f[\varphi(t)]$ — целая функция. Это замечание используется для построения различных римановых поверхностей параболического типа. Отмечается также, что $f(z)$ продолжаема через C там, где $\varphi^{-1}(z)$ продолжаема. Вместо области D типа полуплоскости можно брать области типа полосы и др. Л. И. Волковыский

3728. Примеры к классификации римановых поверхностей. I. Токи (On the examples in the classification of open Riemann surfaces (I). Tôki Yukinari), Osaka Math. J., 1953, **5**, № 2, 267—280 (англ.)

Известно, что для различных классов римановых поверхностей O_F (не имеющих $\not\equiv$ const функций класса F) и O_G (не имеющих функции Грина) имеют место следующие соотношения включения:

$$O_G \subseteq O_{HP} \subseteq O_{HB} \subset O_{HD} \subset O_{AD},$$
$$O_{HB} \subset O_{AB} \subset O_{AD}, \quad O_G \subset O_{HB}$$

(H — гармоничность, A — аналитичность, B — ограниченность, D — ограниченность интеграла Дирихле, P — положительность; см. РЖМат, 1955, 3171). Автор строит примеры, показывающие, что $O_G \subset O_{HP} \subset O_{HB}$ и что не существует соотношения включения между O_{AB} и O_{HD}. Л. И. Волковыский

3729. Проблема, относящаяся к продолжению римановых поверхностей. Хейнс (A problem concerning the continuation of Riemann surfaces. Heins Maurice), Contributions to the theory of Riemann surfaces, Princeton, N. J., 1953, 55—62 (англ.)

Риманова поверхность F называется продолжаемой, если она конформно эквивалентна правильной части другой римановой поверхности, называемой тогда продолжением F. Доказывается, что для продолжаемости данной римановой поверхности F на любую замкнутую риманову поверхность данного рода $p \geqslant 1$ необходимо и достаточно, чтобы F была конформно эквивалентна ограниченной плоской области.

Л. И. Волковыский

3730. Об идеальной границе римановой поверхности. Ройден (On the ideal boundary of a Riemann surface. Royden H. L.), Contributions to the theory of Riemann surfaces, Princeton, N. J., 1953, 107—109 (англ.)

По теории И. М. Гельфанда всякое коммутативное нормированное кольцо R отображается гомоморфно (при определенных условиях — изоморфно) в некоторое кольцо непрерывных функций на бикомпактном пространстве $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов R. Если R — кольцо функций, то построением $\mathfrak{M}$ устанавливается естественная область определения функций, причем, по сравнению с первоначальной областью задания функций, происходит, возможно, еще так называемое «аналитическое» расширение, путем добавления «далеких» в топологическом смысле максимальных идеалов, которые, однако, вполне определяются заданием кольца на первоначальной области (Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е., Успехи матем. наук, 1946, 2, № 1, 68). Автор реферируемой работы сделал попытку использовать эту идею для представления идеальной границы открытой римановой поверхности.

На произвольной открытой римановой поверхности W рассматривается класс BD кусочногладких ограниченных функций с ограниченным интегралом Дирихле. В кольце функций BD вводится топология: $f_i \to f$, если $f_i \to f$ равномерно на каждой компактной части W и $D(f_i - f) \to 0$. Пусть K состоит из функций BD, равных нулю вне компактной части W, и $\overline{K}$ — замыкание K в BD. Если W параболического типа, то $BD = \overline{K}$, если же гиперболического, то (Royden H. L., Trans. Amer. Math. Soc., 1952, **73**, № 1, 40—94) $f = f_K + u$, $f \in BD$, $f_K \in \overline{K}$ и $u \in HBD$ (гармоническая функция из BD). Теперь BD дополняется до полного пространства с нормой $\|f\| = \sup |f| + D(f)$. Оно становится банаховой алгеброй A и, в соответствии с теорией Гельфанда, ее можно представить в виде кольца непрерывных функций в компактном пространстве W^* регулярных максимальных идеалов A. Множество максимальных идеалов A, не содержащих K, изоморфно W. С другой стороны, множество Γ максимальных идеалов A, содержащих K, является замкнутым неплотным подмножеством W^* и рассматривается автором в качестве идеальной границы W. Множество Δ максимальных идеалов A, содержащих $\overline{K}$ (замыкание K в A), есть замкнутое подмножество Γ, называемое гармонической границей W. Если в HBD (оно не изменяется при переходе от BD к A) ввести умножение с помощью отображения π: $f \to u$, то множество максимальных идеалов HBD гомеоморфно Δ и HBD изоморфно кольцу непрерывных функций на Γ. Л. И. Волковыский

3731. Полугруппы преобразований римановой поверхности самой в себя. Розенблум (Semigroups of transformations of a Riemann surface into itself. Rosenbloom Paul C.), Contributions to the theory of Riemann surfaces, Princeton, N. J., 1953, 31—39 (англ.)

Рассматривается однопараметрическое семейство аналитических преобразований римановой поверхности S_1 самой в себя, замкнутое относительно композиции. Если $f(z_1, z_2)$ — точка, в которую преобразуется z_1 при отображении, соответствующем параметру z_2, то f должна удовлетворять функциональному уравнению

$$f[f(z_1, z_2), z_3] = f[z_1, g(z_2, z_3)], \qquad (1)$$

где $g(z_2, z_3)$ — функция, выражающая зависимость произведения двух преобразований семейства от множителей. Предполагается, что областью параметра является риманова поверхность S_2, что f и g аналитичны соответственно на $S_1 \times S_2$ и на $S_2 \times S_2$. Основная проблема состоит в определении всех пар f и g, удовлетворяющих (1). Задача решается до конца для S_1, S_2 параболического типа, представленных комплексной плоскостью z. Решение опирается на теорему Пикара и некоторые ее обобщения.

Если $f = g$, то $f(z_1, z_2) = c$, z_1, z_2, $z_1 + z_2 - c$ или $a(z_1 - b)(z_2 - b) + b$ ($a \neq 0$, b и c — постоянные). В общем случае (1) имеет следующие 6 классов решений: 1) $f = c$ или $f = z_1$, g произвольна; 2) $g = z_2 + c$, $f = \varphi(e^{2\pi i z/c})$, $\varphi(\omega)$ аналитична для $\omega \neq 0$; 3) $g = b(z_2 - c) + c$, $b^n = 1$, $f = \varphi[(z_2 - c)^n]$; 4) $g = a(z_1 - b)(z_2 - b) + b$, $f = (z_1 - b)[a(z_2 - b)]^n + b$; 5) $g = z_1 + z_2 - a$, $f = z_1 + b(z_2 - a)$; 6) $g = z_1 + z_2 - a$, $f = e^{c(z_2 - a)}(z_1 - b) + b$, где a, b и c — произвольные постоянные, n — натуральное число.

Л. И. Волковыский

3732. Функции, представимые как разности субгармонических функций. Арсов (Functions representable as differences of subharmonic functions. Arsove Maynard G.), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, **75**, № 2, 327—365 (англ.)

Содержится систематическая теория δ-субгармонических функций — так автор называет функции, представимые в виде разности двух субгармонических функций. Точное определение изучаемых функций таково: функция w называется δ-субгармонической в открытой области Ω n-мерного евклидова пространства $\mathcal{E}^n$, если существуют субгармонические в Ω функции u и v такие, что w определена в области $D \subset \Omega$, где хотя бы одна из u и v конечна, и $w = u - v$ на D.

Таким образом, w может быть определена не на всей области Ω, однако множество тех точек, в которых она не определена или бесконечна, имеет емкость нуль, а поэтому и меру нуль. Вводятся еще следующие определения: функция, которая почти везде на Ω совпадает с δ-субгармонической функцией, называется почти δ-субгармонической; множество $P \subset \mathcal{E}^n$ называется полярным, если существует субгармоническая функция на $\mathcal{E}^n$, равная $-\infty$ на P; функция называется квази δ-субгармонической в Ω, если она совпадает с δ-субгармонической на Ω функцией везде на Ω, кроме некоторого полярного множества.

Выясняется связь δ-субгармонических функций с распределениями масс на Ω. Устанавливается локальный характер δ-субгармоничности.

Теорема 3. Если w δ-субгармонична (почти δ-субгармонична, квази δ-субгармонична) в окрестности каждой точки открытого множества Ω, то w δ-субгармонична (почти δ-субгармонична, квази δ-субгармонична) на Ω.

Всякая δ-субгармоническая функция w может быть бесконечным числом способов представлена в виде разности субгармонических функций. Выясняется наиболее тесно связанное с w такое представление (каноническое представление) и устанавливается единственность этого представления с точностью до аддитивно входящей в u и v гармонической функции. Даются критерии δ-субгармоничности, почти δ-субгармоничности.

Определение. Функция w, δ-субгармоническая в открытой области Ω и имеющая $D \subset \Omega$ своей областью определения, называется полной, если всякая δ-субгармоническая в Ω функция, совпадающая с w на D, имеет D своей областью определения.

Приведем следующую теорему:

Теорема 9. Необходимым и достаточным условием того, чтобы функция была полной δ-субгармонической на открытом множестве Ω, является локальная представимость ее в виде потенциала плюс гармоническая функция.

Приведем в качестве примера еще одну теорему.

Теорема 19. Пусть w полунепрерывна сверху на открытом множестве Ω. Если $\overline{\Delta}^B w$ ограничен на каждом компактном подмножестве Ω, то w δ-субгармонична на Ω (здесь $\overline{\Delta}^B w$ означает верхний оператор Бляшке).

Далее исследуются алгебраические свойства множества всех δ-субгармонических функций над Ω. Очевидно, что это множество есть линейное пространство. Более того, оно оказывается векторной структурой. Последнее следует из теоремы 22.

Теорема 22. Если w, w_1, w_2 — δ-субгармонические функции (почти δ-субгармонические, квази δ-субгармонические) на открытом множестве Ω, то $\max(w_1, w_2)$, $\min(w_1, w_2)$ и $|w|$ суть снова такие же функции. Если несколько ограничить класс рассматриваемых δ-субгармонических функций, то он становится алгеброй, а именно:

Теорема 25. Множество всех δ-субгармонических и локально ограниченных на Ω (т. е. на каждом компакте, содержащемся в Ω) функций является алгеброй относительно обычных операций сложения и умножения.

То, что множество δ-субгармонических функций имеет такие алгебраические свойства, является одним из наиболее важных поводов для изучения этих функций, ибо множество одних субгармонических функций лишено этих алгебраических свойств.

Далее устанавливается еще целый ряд свойств изучаемых функций и рассматриваются вопросы сходимости их последовательностей. Отметим теорему:

Теорема 27. Каждая непрерывная и почти δ-субгармоническая функция абсолютно непрерывна в смысле Тонелли.

Рассматриваемая теория включает в себя теорию характеристических функций, применявшихся Неванлинна при изучении мероморфных функций. Отметим в заключение, что при $n = 1$ субгармоничность означает просто выпуклость, поэтому δ-субгармонические функции в этом случае называются δ-выпуклыми и их теория обобщает соответствующую теорию выпуклых функций. В частности, цитированная теорема 27 переходит при $n = 1$ в теорему, доказанную ранее Эвансом (Evans G. C., Amer. J. Math., 1933, 55, 29—49).

С. Я. Хавинсон

3733. Функции потенциального типа. Арсов (Functions of potential type. Arsove Maynard G.), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, **75**, № 3, 526—551 (англ.)

Работа примыкает к другой работе автора (см. реф. 3732). Функция, δ-субгармоническая во всей плоскости, называется целой δ-субгармонической функцией. Вводится понятие порядка целой δ-субгармонической функции w. Положим $T_r(w, z) = \mu_r(w, z)\,\lambda(z)$, где $\mu_r(w, z) = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} w(z + re^{i\theta})\,d\theta$, $\lambda(z) = \max(u(z), v(z))$, причем $w(z) = u(z) - v(z)$ — каноническое представление w в виде разности субгармонических функций u и v. Функция $T_r(w, z)$ называется характеристической для w. Для краткости $T_r(w, 0)$ обозначим через $T_r(w)$. Порядком целой δ-субгармонической функции w называется число $\rho(w) = \overline{\lim}_{r\to\infty}[\log T_r(w) / \log r]$. Изучаются различные свойства целых δ-субгармонических функций, связанные с порядком. Рассматриваются также некоторые представления целых δ-субгармонических функций, аналогичные, например, вейерштрассову представлению целых аналитических функций; при этом бесконечные произведения заменены здесь некоторыми интегралами.

Под функцией потенциального типа автор понимает полную (см. реф. 3732) целую δ-субгармоническую функцию порядка нуль, у которой соответствующее ей распределение масс имеет конечную полную вариацию на всей плоскости. Изучаются разнообразные свойства этих функций, в частности их представления. Множество P всех функций потенциального типа оказывается векторной структурой, а после введения некоторой нетривиальной метрики — банаховым пространством. Выясняются некоторые свойства пространства P, исследуется сходимость в нем. В частности, доказывается, что множество P с введенной в него метрикой является пополнением пространства потенциалов.

С. Я. Хавинсон

3734. Топологические методы на римановых поверхностях. Псевдогармонические функции. Дженкинс, Морс (Topological methods on Riemann surfaces. Pseudoharmonic functions. Jenkins James A., Morse Marston), Contributions to the theory of Riemann surfaces, Princeton, N. J., 1953, 111—139 (англ.)

Обобщая результаты Каплана (Kaplan W., Trans. Amer. Math. Soc., 1948, **63**, № 3, 514—522), Бутби (Boothby W. M., Amer. J. Math., 1951, **73**, № 2, 405—438; № 3, 512—538) доказал, что для всякого разветвленного регулярного семейства F кривых, заполняющих евклидову плоскость E, существует топологическое отображение E на область D, при котором F преобразуется в семейство линий уровня функции, гармонической в D (F называется регулярно разветвленным, если в малом оно топологически эквивалентно семейству параллельных отрезков, заполняю-

их прямоугольник, исключая, возможно, множество золированных точек, в окрестности которых кривые , с точностью до топологического отображения, ведут ебя, как линии уровня гармонической функции в крестности ее критической точки). В реферируемой аботе другими топологическими методами, развивае- ыми в основном для произвольных открытых рима- овых поверхностей, доказывается существование псев- огармонической функции (PH-функции) (РЖМат, 955, 188), имеющей в качестве линий уровня заданное емейство кривых F, более общее, чем указано выше. з теоремы авторов об униформизации PH-функций РЖМат, там же) следует тогда обобщение приведен- ой выше теоремы Каплана—Бутби.

Л. И. Волковыский

3735. Уравнения в частных производных и псевдоаналитические функции на римановых поверхностях. Берс (Bers L., Partial differential equations and pseudo-analytic functions on Riemann surfaces. Bers Lipman), Contributions to the theory of Riemann surfaces, Princeton, N. J., 1953, 157—165 (англ.)

За последнее время выявлена глубокая связь между ешениями некоторых эллиптических уравнений или истем, близких к уравнению Лапласа или к уравне- иям Коши—Римана, с теорией аналитических функций. оэтому можно ожидать, что для изучения алгебраико- опологической структуры и свойств в целом много- начных решений таких уравнений окажется полезным ведение соответствующих римановых поверхностей. еферируемая работа представляет набросок такой еории для разработанной, в основном автором, теории севдоаналитических функций (Bers L., Theory of seudo-analytic functions, New York, 1953). Пара функ- ий F, G, определенных на (абстрактной) римано- ой поверхности S, называется порождающей, если $\mathrm{Im}(\overline{F}G) > 0$ и существуют производные F_z, $F_{\bar z}$, G_z, $G_{\bar z}$ $\partial/\partial z = (\partial/\partial x - i\partial/\partial y)/2$, $\partial/\partial\bar z = (\partial/\partial x + i\partial/\partial y)/2$), довлетворяющие условию Гёльдера порядка δ, $0 < \delta < 1$ ($z = x + iy$ — локальный параметр точки $p \in S$). Функция $w(p)$ называется (F, G)-псевдоаналитической а S, если она становится псевдоаналитической в обыч- ом определении (см. предыдущую ссылку) в плоскости араметра для всех точек $p \in S$ (если $w = \varphi F + \psi G$, о $\omega = \varphi + i\psi$ называется тогда (F, G)-псевдоаналити- еской функцией второго рода). Если dw — непрерыв- ый дифференциал на S и C — простая гладкая амкнутая кривая, то число $\mathrm{Re}\oint_C F^*\,dw - i\,\mathrm{Re}\oint_C G^*\,dw$, де $F^* = 2\overline{G}/(F\overline{G} - \overline{F}G)$, $G^* = 2\overline{F}/(F\overline{G} - \overline{F}G)$, назы- ается ($F$, G)-периодом dw вдоль C; если он равен улю для всех C, гомологичных нулю, то dw назы- ается (F, G)-псевдоаналитическим дифференциалом. ычетом (F, G)-дифференциала dw в точке $p \in S$ (по- юсе dw) называется (F, G)-период dw по простому онтуру, окружающему точку p в ее окрестности. сли все вычеты и (F, G)-периоды dw равны нулю, о $dw = \dot{w}\,dz$ ($\cdot$ означает (F, G)-производную), где w ероморфная) (F, G)-функция; если же эти условия е выполняются, то $\omega(q) = \mathrm{Re}\int_{q_0}^{q} F^*\,dw - i\,\mathrm{Re}\int_{q_0}^{q} G^*\,dw$ сть многозначная (F, G)-функция второго рода (абелев F, G)-интеграл).

Для замкнутых римановых поверхностей S рода g ормулируются следующие теоремы:

1) Пусть dw_j — (F, G)-псевдоаналитический диф- еренциал, определенный в окрестности точки p_j и с ычетом σ_j ($j = 1, \ldots, k$). Если $\sum_1^k \sigma_j = 0$, то на S уществует в точности один (F, G)-дифференциал dw акой, что разность $dw - dw_j$ регулярна в p_j ($j = 1, \ldots, k$) и все периоды dw по неразбивающим кривым чисто мнимые.

2) Пусть d — дивизор на S порядка m, A — число линейно независимых (F^*, G^*)-функций, кратных $1/d$, B — число линейно независимых (F, G)-дифференциалов, кратных d. Тогда $A - B = 2(m + 1 - g)$.

Рассмотрены также случаи $g = 0$, $g = 1$ и одно приложение к уравнению $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \alpha(x, y)\varphi_x + \beta(x, y)\varphi_y = 0$.

Л. И. Волковыский

3736. Аналог одной теоремы Лефшеца. Пятецкий-Шапиро И. И., Докл. АН СССР, 1954, 96, № 5, 917—920

Пусть D — ограниченная область в пространстве n комплексных переменных и Γ — такая дискретная группа аналитических автоморфизмов D, что фактор-пространство D/Γ компактно. Как известно (Зигель К., Автоморфные функции нескольких комплексных переменных, М., Изд-во иностр. лит-ры, 1954, гл. X), в этом случае фактор-пространство D/Γ является аналитическим многообразием, аналитически эквивалентным некоторому алгебраическому многообразию.

В реферируемой работе доказывается, что если ни одно из преобразований группы Γ, кроме единичного, не имеет неподвижных точек, то фактор-пространство D/Γ аналитически эквивалентно алгебраическому многообразию без особых точек.

Отображение D/Γ на это многообразие задается формулами $x_i = \varphi_i(z)$, где $\varphi_i(z)$ образуют полную систему линейно независимых автоморфных форм достаточно большого веса.

Лефшецом был доказан аналогичный факт для абелевых функций.

И. Р. Шафаревич

3737. О дифференцируемых отображениях. Кудрявцев Л. Д., Докл. АН СССР, 1954, 95, № 5, 921—923

Рассматриваются некоторые свойства дифференцируемых отображений областей евклидовых пространств, обобщающие известные свойства конформных отображений.

Первые четыре теоремы относятся к отображениям, якобиан которых не меняет знака, и выражают принцип сохранения области (в сильной и слабой форме), принципы максимума и минимума (в слабой форме) и принцип соответствия границ.

Далеко идущим обобщением теоремы Руше является теорема 5: Существует функция $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ такая, что если дано дифференцируемое отображение f, якобиан которого отличен от нуля в точке x_0, и если непрерывное отображение g на поверхности шара U_δ с центром x_0 и достаточно малого радиуса δ отличается от f меньше, чем на ε, то образы U_δ при обоих отображениях покрывают шар радиуса ε с центром $y_0 = f(x_0)$. Из этой теоремы выводятся обобщение теоремы Гурвица и теоремы о пределе последовательности однолистных функций, а также оценка якобиана предельного отображения.

Результаты распространяются на специальные классы непрерывных отображений, если вместо якобиана рассматривать степень отображения. Далее приводится обобщенный принцип Дирихле, по которому минимум, интеграла $\int (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2)\,dG$, где $\lambda_i = \rho_i/r$ — отношения полуосей бесконечно малого эллипсоида соответствующего сфере радиуса r, к этому радиусу, в классе непрерывно дифференцируемых отображений области G, фиксированных на границе, достигается для гармонических отображений.

Наконец, приводятся четыре теоремы метрического характера относительно меры множеств, соответствую-

щих друг другу при дифференцируемом отображении. Все теоремы приводятся без доказательства.

Б. В. Шабат

3738. Об одном свойстве локально-однолистных функций комплексного переменного. Полак А. И., Докл. АН СССР, 1954, **96**, № 2, 241—243

Доказывается теорема: пусть $f(z)$ — функция, непрерывная и локально однолистная на ограниченном, замкнутом и локально связном множестве Z, и $\varphi(w)$ — обратная к ней; тогда множество $W = f(Z)$ можно разбить на конечную или счетную систему $\{G_i\}$ областей (относительно W) таких, что на каждой G_i функция $\varphi(w)$ n-значна, причем $n = n(i)$. Доказательство опирается на теорему Куратовского (Fundam. math., 1928, **11**, 169—185).

Б. В. Шабат

3739 К. Автоморфные функции нескольких комплексных переменных. Зигель К., 168 стр., М., Изд-во иностр. лит-ры, 1954, 9 р.

Содержание книги распадается на 4 части.

Первая часть (гл. I—III) носит вводный характер. При помощи подготовительной теоремы Вейерштрасса доказывается однозначность разложения на простые множители в кольце степенных рядов от нескольких переменных. Вводятся понятия голоморфной и мероморфной функций в некоторой области пространства нескольких комплексных переменных и формулируются проблемы Кузена (существование целой функции с заданными нулями и мероморфной функции с заданными главными частями).

Во второй части (гл. IV—IX) излагается теория абелевых функций, т. е. мероморфных функций от n комплексных переменных, имеющих $2n$ линейно независимых (в вещественном смысле) периодов. В гл. IV и V доказывается, что абелева функция с периодами $c_1, \ldots, c_{2n}$ представляется в виде отношения двух якобиевых функций, т. е. целых функций $g(z)$ и $h(z)$, для которых $g(z + c_i) = e^{v_i(z)}\, g(z)$, $h(z + c_i) = e^{v_i(z)}\, h(z)$, а $v_i(z)$ — линейные многочлены (z и $c_1, \ldots, c_{2n}$ — n-мерные комплексные векторы). Из этого в гл. VI выделяются условия, необходимые для того, чтобы существовала невырожденная (т. е. не сводящаяся линейным преобразованием к функции меньшего числа переменных) абелева функция с заданной системой периодов $c_1, \ldots, c_{2n}$. Если C — матрица типа $(n, 2n)$ со столбцами $c_1, \ldots, c_{2n}$, то эти условия заключаются в существовании такой кососимметрической целочисленной матрицы A типа $(2n, 2n)$, что

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & A \text{ невырождена,} \\ 2) & CA^{-1}C' = 0, \\ 3) & \overline{C}\,A^{-1}\,C' \text{ — отрицательно определенная эрмитова форма.} \end{array}\right\} \quad (1)$$

В гл. VII устанавливается, что условия (1) достаточны для того, чтобы существовала невырожденная абелева функция с матрицей периодов C. Для этого доказывается, что после надлежащего линейного преобразования якобиева функция может быть сделана периодической относительно n из $2n$ векторов $c_1, \ldots, c_{2n}$. При выполнении условий (1) якобиева функция может быть построена при помощи своего ряда Фурье (тэта-функции), а абелева функция — как отношение якобиевых. В гл. VIII доказывается, что поле абелевых функций с заданной матрицей C, удовлетворяющей условиям (1), изоморфно полю алгебраических функций от n независимых переменных. В гл. IV формулируются два вопроса, относящихся к произвольному n-мерному аналитическому многообразию M: 1) Когда на M существует n алгебраически независимых мероморфных функций? 2) Верно ли, что $n+1$ мероморфных функций на M алгебраически зависимы? Содержание гл. V—VIII дает ответы на эти вопросы для случая, когда M есть фактор-пространство n-мерного комплексного пространства по решетке периодов. (В настоящее время оба эти вопроса решены в общем случае, причем второй — положительно. Относительно первого см. Kodaira K., Ann. Math., 1954, **60**, № 1, 28—48, относительно второго — Chow W. L., Amer. J. Math., 1954, **76**, № 2, 453—476). В гл. IX приводится характеристика таких фактор-пространств как единственных компактных комплексных аналитических групп. В заключение главы приводится (не со всеми подробностями) топологическое доказательство Лефшеца необходимости условий (1). К теории абелевых функций примыкают два примечания переводчика в конце книги. В одном из них содержится принадлежащее Бохнеру доказательство теоремы сложения абелевых функций, в другом доказывается теорема Лефшеца о том, что фактор-пространство n-мерного пространства по решетке периодов абелевой функции аналитически эквивалентно алгебраическому многообразию без особых точек.

Третья часть посвящена более общим вопросам теории автоморфных функций. В гл. X рассматривается дискретная группа Γ аналитических автоморфизмов области D пространства n комплексных переменных. Доказывается, что если область D ограничена, а фактор-пространство D по Γ компактно, то поле автоморфных относительно Γ функций изоморфно полю алгебраических функций от n независимых переменных.

В четвертой части (гл. XI, XII) рассматриваются некоторые частные виды дискретных групп. Приводится подробное изложение (но без доказательства) принадлежащей Э. Картану классификации симметрических ограниченных областей, т. е. таких областей D, для любой точки a которых существует аналитический автоморфизм D, совпадающий со своим обратным и имеющий единственную неподвижную точку a. Эти области распадаются на четыре серии и две исключительные области, соответствующие $n = 16$ и $n = 27$. Одну из серий дает обобщенный единичный круг, состоящий из комплексных симметрических матриц Z порядка p, для которых $Z\overline{Z} < E$ (E — единичная матрица порядка p). Он, как и при $p = 1$, аналитически эквивалентен верхней полуплоскости, состоящей из симметрических матриц $X + iY$, для которых $Y > 0$. В гл. XII изучается эта область. Ее аналитические автоморфизмы имеют вид $Z \to (AZ + B) \times (CZ + D)^{-1}$, где матрица $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ порядка $2p$ вещественна и удовлетворяет соотношению $M'JM = J$, $J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$. Образованная ими группа называется симплектической. В ней рассматривается дискретная подгруппа, состоящая из всех целочисленных симплектических матриц и называемая модулярной группой. Устанавливается связь этого понятия с абелевыми функциями. При помощи линейного преобразования переменных и перехода к другому базису решетки периодов матрицу периодов C можно привести к виду (D, W), где W — целочисленная диагональная матрица порядка p. Предположим, что $D = E$. Тогда условия (1) окажутся эквивалентными тому, что W принадлежит обобщенной верхней полуплоскости. Поля абелевых функций с матрицами периодов (E, W) и (E, W') изоморфны тогда и только тогда, когда W и W' эквивалентны относительно модулярной группы. Строится фундаментальная область модулярной группы и доказывается, что поле функций, автоморфных относитель-

о этой группы (модулярных функций, изоморфно олю алгебраических функций от $p(p+1)/2$ независимых переменных.

Книга является первым связным изложением теории втоморфных функций нескольких переменных. Почти все результаты последней главы принадлежат автору.

И. Р. Шафаревич

См. также: 3584, 3621, 3740, 3762 Д, 3769, 3773 К, 3780, 3816.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3740. О решениях дифференциального уравнения первого порядка вокруг неподвижной особой точки. Саито (Sur les solutions autour d'un point singulier fixe des équations différentielles du premier ordre. Saito Tosiya), Kōdai Math. Sem. Repts, 1953, № 4, 121—126 (франц.)

Рассматривается уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{yP(x,y)}{Q(x,y)}, \quad P = \sum_{k=0}^{m} a_k(x)\, y^k,$$

$$Q = \sum_{k=0}^{n} b_k(x)\, y^k, \qquad (1)$$

де $a_k(x)$ и $b_k(x)$ — однозначные аналитические функции, а $yP(x,y)$ и $Q(x,y)$ взаимно просты при любом x, $x=0$ — изолированная неподвижная особая точка (1).

Теорема. Пусть $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ — решение (1), принимающее значение y_0 при $x=x_0$. Если $|y_0|$ достаточно мало и если вычет λ функции $a_0(x)/b_0(x)$ в $x=0$ не есть рациональное число, то в достаточно малой кольцевой области вокруг $x=0$ функция φ (многозначная) допускает представление

$$\varphi(x,x_0,y_0) = \sum_{k=1}^{\infty} (cx^{\lambda})^k v_k(x),$$

где функции $v_1(x), v_2(x), \ldots$ имеют, быть может, изолированную особенность при $x=0$.

Эта теорема несколько обобщает известный результат Брио и Буке. Р. Э. Виноград

3741. О логарифмической производной интегралов линейных дифференциальных уравнений. Бернацкий (Sur la dérivée logarithmique des intégrales des équations différentielles linéaires. Biernacki Mieczysław), Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, 1952, A6, № 5, 55—64 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.; резюме польск., русс.)

Доказывается следующая теорема: Пусть $A(x)$ — положительная, неубывающая, непрерывно дифференцируемая при $x \geqslant x_0$, функция, причем $\lim\limits_{x\to\infty} A(x) = +\infty$. Если функция $y=y(x)$ при $x>x_0$ удовлетворяет неравенствам $y^{(k)}>0$ $(k=0,1,\ldots,n-1)$ и $0<|y^{(n)}|/y \leqslant A(x)$, то при $x>x_1$ выполнены неравенства

$$y^{(k)}/y < [A(x)]^{k/n}\, n!/k! \quad (k=1,\ldots,n-1). \qquad (1)$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$y(x) < C \exp\left\{n! \int_{x_0}^{x} [A(x)]^{1/n}\, dx\right\},$$

где C — постоянная.

Как показывает пример функции $y=e^{x^2}$, удовлетворяющей уравнению $y^{(n)} = A(x)\, y$, где $A(x) = e^{-x^2} d^n(e^{x^2})/dx^n$, показатели k/n $(k=1,\ldots,n-1)$ в неравенствах (1) не могут быть уменьшены. Остается открытым вопрос, могут ли постоянные $n!/k!$ быть заменены абсолютными постоянными C_k. Автор доказывает, что в частных случаях: $n=2$ и $n=3$ (последний рассматривается при дополнительном ограничении, что $A'(x)/A(x)$ является неубывающей, достаточно гладкой функцией, и лишь для функций y, удовлетворяющих уравнению $y'''=A(x)\,y$) можно положить $C_k=1$. Если при $n=3$, сверх того, $A'(x)/A(x) \to +\infty$, то при достаточно больших x имеют место неравенства

$$y'y| < y''/y' < y'''/y'' < y^{\mathrm{IV}}/y'''.$$

Опечатки: стр. 56, строка 12 снизу, напечатано $-3!$ $\int_{x_0}^{x}$ вместо $+3!$ $\int_{x_0}^{x}$; стр. 57, строка 8 сверху, напечатано $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x)\, x^n$ вместо $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x)/x^n$.

Б. П. Демидович

3742. О системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными или периодическими коэффициентами. Сибуя (Sur un système des équations différentielles ordinaires nonlinéaires à coefficients constants ou périodiques. Sibuya Yasutaka), Tokē daigaku rigakubu kiē; J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. 1, 1954, 7, № 1, 19—32 (франц.)

Рассматривается система уравнений

$$\frac{dx_j}{dt} = \lambda_j x_j + \sum_{p_1+\ldots+p_n\geqslant 2} a_{jp}(t)\, x_1^{p_1} \ldots x_n^{p_n} \quad (j=1,\ldots,n) \qquad (1)$$

где λ_j — постоянные, $p=(p_1,\ldots,p_n)$ — всевозможные перестановки из целых неотрицательных чисел $p_1,\ldots,p_n$, $a_{jp}(t)$ — постоянные (случай I) или периодические функции с периодом 2π (случай II), причем ряды в правых частях уравнений (1) сходятся при $\|x\| \max(|x_1|,\ldots,|x_n|) < \delta$ $(\delta>0)$ и $-\infty<t<\infty$. При помощи формальных разложений

$$x_j = y_j + \sum_{p_1+\ldots+p_n\geqslant 2} \gamma_{jp}(t)\, y_1^{p_1} \ldots y_n^{p_n}, \qquad (2)$$

где $\gamma_{jp}(t)$ — постоянные (случай I) или дифференцируемые периодические функции с периодом 2π (случай II), система (1) приводится к виду

$$dy_j/dt = \lambda_j y_j \quad (j=1,\ldots,n).$$

Как известно, если точки $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ расположены внутри выпуклой области комплексной плоскости, не содержащей начала координат, то формальные разложения (2) являются сходящимися в некоторой окрестности начала координат $y_1=0,\ldots,y_n=0$ при каждом t (см., например, Немыцкий В. В. и Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, изд. 2, 1949, гл. IV). Автор изучает случай, когда $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ расположены на мнимой оси. Основные результаты сводятся к следующему. Пусть

$$x_j = \sum_{p_1+\ldots+p_n\geqslant 1} \varphi_{jp}(t)\, \xi_1^{p_1} \ldots \xi_n^{p_n} \quad (j=1,\ldots,n) \qquad (3)$$

— решение системы (1) с начальными условиями $x_j(0)=\xi_j$.

Теорема 1. В случае I формальные разложения (2) являются сходящимися, если выполнены условия: 1) числа λ_j — чисто мнимые и $e^{\lambda_j t}$ допускают относительно t общий период $\omega > 0$; 2) решение (3) определено и равномерно ограничено относительно $(t, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ при $0 \leqslant t < \infty$ и $\| \xi \| < \delta_0$, где δ_0 достаточно мало.

Теорема 2. В случае II формальные разложения (2) являются сходящимися, если выполнены условия: 1) числа λ_j чисто мнимые, причем e^{it} и $e^{\lambda_j t}$ допускают относительно t общий период $\omega > 0$; 2) решение (3) определено и равномерно ограничено относительно $(t, \xi_1, \ldots, \xi_n)$. при $0 \leqslant t < \infty$ и $\| \xi \| < \delta_0$, где δ_0 достаточно мало.

Автор отмечает, что источником его работы явилась статья Хукухары (Hukuhara M., J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. 1, 1951, 6, 295—317). Кроме того, для случая системы с постоянными коэффициентами аналогичные результаты при помощи теории групп аналитических преобразований были получены Урабе (Urabe M., J. Sci. Hiroshima Univ., 1952, **A16**, 267—283).

Б. П. Демидович

3743 О системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными или периодическими коэффициентами. II. Сибуя (Sur un système des équations différentielles ordinaires non linéaires à coefficients constants ou périodiques. II Sibuya Yasutaka), J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. 1, 1954, 7, № 1, 107—127 (франц.)

Автор рассматривает систему дифференциальных уравнений того же вида, что и в предыдущей работе (см. реф. 3742), которая допускает формальное решение

$$x_j = C_j e^{\lambda_j t} + \sum\nolimits_{p_1+\ldots+p_n \geqslant 2} \gamma_{jp}(t) \exp(t\lambda(p))\, C_1^{p_1} \ldots C_n^{p_n}, \tag{1}$$

где $\lambda(p) = p_1\lambda_1 + \ldots + p_n\lambda_n$ и $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные, причем в случае I $\gamma_{jp}(t) = \text{const}$, а в случае II $\gamma_{jp}(t)$ — дифференцируемые функции с периодом 2π. Кроме того, предполагается, что для начальных условий $x_j(0) = \xi_j$ при достаточно малом $\| \xi \|$ существует решение в форме ряда

$$x_j = \xi_j e^{\lambda_j t} + \sum\nolimits_{p_1+\ldots+p_n \geqslant 2} \varphi_{jp}(t)\, \xi_1^{p_1} \ldots \xi_n^{p_n}.$$

Пусть $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$ при $j = 1, \ldots, s$; $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$ при $j = s+1, \ldots, \tau$; $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$ при $j = \tau+1, \ldots, n$. Справедливы следующие утверждения, являющиеся усилением предыдущих результатов автора.

Теорема 1. Если в случае I числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ $(r \leqslant s)$ такие, что $e^{\lambda_j t}$ $(j = 1, \ldots, r)$ допускают относительно t общий период $\omega > 0$, то формальное решение (1) является сходящимся в следующих двух случаях: 1) $C_{r+1} = \ldots = C_s = C_{s+1} = \ldots = C_\tau = 0$; 2) $C_{r+1} = \ldots = C_s = C_{\tau+1} = \ldots = C_n = 0$.

Теорема 2. Если в случае II числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ $(r \leqslant s)$ такие, что e^{it} и $e^{\lambda_j t}$ $(j = 1, \ldots, r)$ допускают относительно t общий период $\omega > 0$, то формальное решение (1) является сходящимся в случаях 1) и 2) (см. теорему 1).

Дальнейшие теоремы связаны с некоторым ослаблением условий теорем 1 и 2. Отметим еще следующий результат: если $a_{jp}(t) = \text{const}$ и выполнены предположения теоремы 1, то существует периодическое решение системы (1) с периодом $\omega > 0$, содержащее r произвольных постоянных.

Б. П. Демидович

3744. О некоторых аспектах теории конечноразностных уравнений. Маринеску (Asupra unor aspecte ale teoriei ecuațiilor cu diferențe finite. Marinescu G.), Studii și sercetări mat., 1953, 4, № 3—4, 355—371 (рум.; резюме русс., франц.)

Излагаются две точки зрения на теорию линейных разностных уравнений. Одна из них объединяет теорию линейных разностных уравнений с теорией линейных дифференциальных уравнений. Она состоит в том, что линейное разностное уравнение рассматривается как частный случай операторного уравнения $A^n(x) + a_1 A^{n-1}(x) + \ldots + a_{n-1} A(x) + a_n x = 0$, где A — линейный оператор, действующий в коммутативном кольце $\mathfrak{F}$ (и принимающий значения из $\mathfrak{F}$) и обладающий свойством: $A(xy) = xA(y) + A(x)T(y)$, причем $T(xy) = T(x)T(y)$; в случае разностных уравнений $T[x(t)] = x(t+1)$, $0 \leqslant t < \infty$, а в случае дифференциальных уравнений $T(x) = x$. Вводится обобщение определителя Вронского: $D(x_1, x_2, \ldots, x_n; A) = A^{i-1}(x_k)|_{i,k=1}^n$, для которого обнаруживаются обычные свойства. В этом аспекте теории разностных уравнений периодические функции $x(t)$ периода 1 аннулируются оператором A, так что они играют роль «постоянных».

Другая точка зрения, приводящая разностное уравнение n-го порядка к системе n уравнений, заключается в том, что функции $x(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$ рассматриваются как последовательности функций $\{x_n(t)\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, где $x_n(t) = x(t+n)$ — функции, определенные на отрезке $0 \leqslant t < 1$. И в этом аспекте периодические функции периода 1 являются «постоянными», а вопрос об асимптотическом поведении функции $x(t)$ сводится к задаче о сходимости последовательности $\{x_n(t)\}$.

Автор отмечает следующее естественное обобщение теоремы Пуанкаре. Если: 1) в разностном уравнении

$$x(t+n) + \sum\nolimits_{i=1}^n a_i(t)\, x(t+n-i) = 0$$

коэффициенты $a_i(t)$ асимптотически ведут себя, как периодические функции, т. е. $\lim_{t\to\infty} |a_i(t) - \alpha_i(t)| = 0$, где $\alpha_i(t+1) = \alpha_i(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$; 2) корни $\lambda_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ уравнения $\lambda^n + \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)\lambda^{n-i} = 0$ таковы, что $0 < \lambda_0 < |\lambda_n(t)| < \ldots < |\lambda_1(t)| < M$ $(0 \leqslant t < 1)$ и $\sup_{0\leqslant t<1} |\lambda_i(t)| / |\lambda_j(t)| = \rho_{ij} < 1$ $(i < j)$, то любое решение $x(t)$ рассматриваемого уравнения удовлетворяет соотношению

$$\lim\nolimits_{t\to\infty} |x(t+1)/x(t) - \lambda_j(t)| = 0,$$

где $\lambda_j(t)$ — один из корней «характеристического» уравнения. Доказательство следует изложению теоремы Пуанкаре в книге А. О. Гельфонда (Исчисление конечных разностей, М. — Л., Гостехиздат, 1952, гл. V, § 5, 416—428).

А. П. Шварцман

3745. Некоторые положения условий устойчивости Ляпунова. Антосевич, Дейвис (Some implications of Liapunov's conditions for stability. Antosiewicz H. A., Davis P.), J. Rational Mech. and Analysis, 1954, 3, № 4, 447—457 (англ.)

Рассматривается система

$$dx/dt = p(x, t), \tag{1}$$

где $p(x, t)$ есть векторная функция вектора x и вещественной скалярной переменной t, непрерывная по x и t и удовлетворяющая по x условию Липшица для каждой точки x в некоторой области R: $\| x \| \leqslant A$, $t \geqslant 0$, n-мерного пространства; $p(0, t) \equiv 0$.

Доказывается, что если система (1) обладает положительно определенной функцией Ляпунова, допускающей сконечно малый высший предел, производная от оторой, вычисленная в силу (1), отрицательно определенная, то для любых $t_0 \geqslant 0$, достаточно малого и $0 < M < 1$ существует $T(M, x_0) > 0$ такое, что $x(t_0 + t, x_0, t_0) \| \leqslant M \| x_0 \|$ для всех $t \geqslant T$. Этот зультат содержится в работе Малкина (РЖМат, 1955, 1).

Далее рассматривается линейная система

$$dx / dt = A(t)\, x, \qquad (2)$$

е $A(t)$ — матрица, элементы которой непрерывные, вномерно ограниченные функции для $t \in [0, +\infty]$. Теорема. Для того чтобы матрица фундаментальй системы решений $X(t)$ обладала свойством

$$\| X(t) X^{-1}(t_0) \| \leqslant M \exp[-\alpha (t - t_0)],$$

е M и α — положительные постоянные, не зависящие t_0, необходимо и достаточно, чтобы у системы (2) ществовала функция Ляпунова $V(x, t) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k$,

е $a_{ik} = a_{ik}(t)$ — равномерно ограниченные, непрерывно ффференцируемые функции t. Теорема имеется в ниге Малкина (Теория устойчивости движения, Госхиздат, 1952).

Далее доказывается теорема: Каждое решение (t, y_0, t_0) системы

$$dy / dt = A(t)\, y + q(y, dy/dt, t)$$

достаточно малыми значениями $y(t_0)$, $y'(t_0)$ будет довлетворять для всех $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ неравенству $(t, y_0, t_0) \| \leqslant M \exp[-\alpha (t - t_0)]$, где M и α — положильные постоянные, не зависящие от t_0, если $q(y, z, t)$ прерывна для всех y, z, $t \geqslant 0$, $q(0, 0, t) \equiv 0$, а $\| q \| \leqslant \lambda_1 \| y \| + \lambda_2 \| z \|$ для достаточно малых $\| y \|$, $\| z \|$ всех $t \geqslant 0$, где λ_1 и λ_2 — положительные постоянные, висящие от верхней границы $A(t)$ $(t \geqslant 0)$, и если трица фундаментальной системы решений для (2) ладает свойством, сформулированным в предыдущей ореме.

Приводится предложенный Старжинским (Прикл. матем. механика, 1952, **16**, 550—504) критерий существования ункции Ляпунова уравнения $\ddot{x} + p(t)\, \dot{x} + q(t)\, x = 0$, е $0 < l \leqslant p(t) \leqslant L$, $0 < m \leqslant q(t) \leqslant M$.

Библиография, 24 названия. В. И. Зубов

3746. Строение в целом совокупности интегральных кривых обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости. Маркус (Global structure of ordinary differential equations in the plane. Markus L.), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, **76**, № 1, 127—148 (англ.)

Пусть динамическая система

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y) \qquad (1)$$

гладкими правыми частями и изолированными особыми чками дана на области R плоскости E. Две такие системы называются o-эквивалентными, если области их определения можно отобразить друг на друга гомеоморфно сохранением ориентации так, чтобы интегральные линии дной системы перешли в интегральные линии другой системы. Семейство интегральных линий, заполняющих область R, называется параллельным, если определяющая о семейство динамическая система o-эквивалентна системам $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = 0$ в E (полоса), $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x$ в $E - (0, 0)$ (кольцо) или $\dot{x} = x$, $\dot{y} = y$ в $E - (0, 0)$ адиальная область). Пусть $R = E$; интегральная линия называется сепаратрисой, если ее нельзя включить в параллельное семейство на области N, ограниченной множествами $S_+ = \overline{S(t \geqslant 0)} - S(t \geqslant 0)$, $S_- = \overline{S(t \leqslant 0)} - S(t \leqslant 0)$ и интегральными кривыми S' и S'', для которых $S'_+ = S''_+ = S_+$, $S'_- = S''_- = S_-$, причем для любой кривой $\tilde{S}$ из данного параллельного семейства должно быть $\tilde{S}_+ = S_+$, $\tilde{S}_- = S_-$. Множество всех точек $\mathfrak{S}$ всех сепаратрис системы (1) оказывается замкнутым и каждая из компонент связности множества $E - \mathfrak{S}$ называется канонической областью системы (1). После разбора ряда частных примеров показывается, что семейство интегральных линий в каждой канонической области является параллельным и что для отсутствия сепаратрис необходимо и достаточно, чтобы все семейство интегральных линий представляло собой полосу. В случае конечного числа сепаратрис устанавливается соотношение между этим числом и числом канонических областей.

Конфигурацией сепаратрис $S\mathfrak{S}$ называется совокупность всех сепаратрис, к которой добавлено по одной интегральной линии из каждой канонической области. Доказано, что две динамические системы o-эквивалентны тогда и только тогда, когда при некотором гомеоморфизме плоскости на себя (сохраняющем ориентацию) $\mathfrak{S}_1$ переходит в $\mathfrak{S}_2$, а каждая из линий $S\mathfrak{S}_1$ в одну из линий $S\mathfrak{S}_2$; при этом предполагается, что обе системы не имеют предельных сепаратрис, кроме точек покоя (сепаратриса S называется предельной, если $S \subset \overline{\mathfrak{S} - S}$). Далее доказано, что такая o-эквивалентность имеет место тогда и только тогда, когда конфигурации $S\mathfrak{S}_1$ и $S\mathfrak{S}_2$ в некотором смысле одинаково разделяют плоскость. Доказывается, что если при соответствующих предположениях этот способ разделения плоскости задать заранее, то существует динамическая система, для которой конфигурация сепаратрис реализует заданный способ разделения плоскости.

Интегралом системы (1) называется вещественная гладкая функция, постоянная вдоль каждой интегральной линии и не постоянная ни на какой области. Доказывается, что если нет предельных сепаратрис и радиальных канонических областей, то во всей плоскости существует интеграл, удовлетворяющий ряду дополнительных условий. Вопрос о том, для каждой ли системы с аналитическими правыми частями без точек покоя имеется интеграл во всей плоскости, автор оставляет открытым. В заключение рассматриваются некоторые свойства сепаратрис, связанные с непрерывными однопараметрическими преобразованиями плоскости, переводящими систему (1) в себя.

Изложение сжатое. Кроме свойств траекторий динамических систем на плоскости, существенно применяются результаты Каплана (Kaplan W., Duke Math. J., 1940, **7**, 154—185; 1941, 8, 11—46; Trans. Amer. Math. Soc., 1948, 63, 514—522) и автора (Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1952, **38**, sér. 5, 311—322; РЖМат, 1953, 639). В статье не упоминаются работы Б. Леонтовича, А. Майера и А. Андронова, Л. Понтрягина (Докл. АН СССР, 1937, **14**, № 5, 251—254; 247—250), в которых сформулированы многие результаты, полученные автором. Имеются опечатки в нумерации списка литературы.

Библиография, 15 названий. А. Д. Мышкис

3747. Новые критерии существования периодического решения известного нелинейного дифференциального уравнения. Бем (Nuovi criteri di esistenza di soluzioni periodiche di una nota equazione differenziale non lineare. Böhm Corrado), Ann. mat. pura ed appl., 1953, **35**, 343—353 (итал.)

Рассматривается уравнение

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \sin x - \beta = 0, \qquad (1)$$

где $\alpha = \sin\theta / \eta$, $\eta > 0$, $\beta = \sin\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.

Подстановкой $x = \pi - \theta - \xi$, $x \doteq y$ уравнение (1) приводится к виду

$$F(\xi, y, dy/d\xi) \equiv y\,dy/d\xi - y\eta^{-1}\sin\theta - \\ - \sin(\xi + \theta) + \sin\theta = 0. \quad (2)$$

На основании критерия сравнения Пиконэ (Picone M., Ann. mat. pura ed appl., 1941, ser. 4, **20**, 67—103) формулируется теорема: Пусть дано дифференциальное уравнение (2) и $y(\xi) > 0$ — решение этого уравнения в интервале $a - b \leq \xi \leq a + b$, пусть $z(\xi) > 0$ — непрерывная функция, для которой $z(a) = y(a)$. Если в рассматриваемом интервале $F(\xi, z, dz/d\xi) \geqslant 0$, то выполняются неравенства $z(\xi) \geqslant y(\xi)$ для $\xi = a + t$, $z(\xi) \leqslant y(\xi)$ для $\xi = a - t$, $0 \leqslant t \leqslant b$. При помощи этой теоремы доказывается, что если

$$\eta \geqslant [2^{-1}\pi(\sin\theta + 2^{-1}\pi\cos\theta)]^{1/2},$$

то существует периодическое решение уравнения (2), а если $\eta \leqslant \cos\theta/2$, такого решения не существует. Эти результаты улучшают соответствующие неравенства, полученные Трикоми и Зельфертом (Tricomi F., Ann. R. Scuola norm. sup. Pisa, 1933, **2**, ser. 1—20; Seifert G., Z. angew. Math. und Phys., 1952, **3** № 6, 468—471).

Ю. А. Митропольский

3748. Уравнения нелинейных колебаний в связи с их применениями. Граффи (Equazioni delle oscillazioni non-lineari in relazione alle applicazioni. Graffi Dario), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **1**, 218—231 (итал.)

Рассматриваются уравнения типа

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = e(t), \quad (1)$$

где $e(t)$ — периодическая функция t. Уравнение (1) можно записать в виде

$$d\varepsilon/dt = -f(x, \dot{x})\dot{x}^2 + e(t)\dot{x}, \quad (2)$$

где ε — сумма кинетической и потенциальной энергии системы: $\mathcal{E} = \dot{x}^2/2 + V(x)$, $V(x) = \int g(x)\,dx$.

При $e(t) = 0$ в зависимости от того, будет ли энергия в процессе движения оставаться постоянной или изменяться, различают консервативные, диссипативные и автоколебательные системы. Приводятся примеры уравнений конкретных механических и электрических колебательных систем: уравнение колебаний маятника, уравнения Трикоми, Льенара, Ван-дер-Поля. Характер решения уравнений (при $e(t) = 0$) исследуется при помощи рассмотрения фазовой плоскости.

Рассматриваются также вынужденные колебания системы, описываемой уравнениями

$$L_1\ddot{x}_1 + M\ddot{x}_2 + f_1(x_1)\dot{x}_1 + x_1/c_1 = e_1(t),$$
$$M\ddot{x}_1 + L_2\ddot{x}_2 + f_2(x_2)\dot{x}_2 + x_2/c_2 = e_2(t),$$

где L_1, L_2, M, c_1, c_2 — постоянные, $f_1(x_1)$, $f_2(x_2)$ — функция такого же вида как и функция $f(x)$ в уравнении Льенара, $e_1(t)$, $e_2(t)$ — периодические функции t с периодом T. Для исследования вопроса о периодических решениях периода T строится эллипсоид R в пространстве четырех измерений

$$x_1, x_2, y_1 = L_1\dot{x}_1 + M\dot{x}_2 + \int_0^{x_1} f_1(x_1)\,dx_1,$$

$$y_2 = M\dot{x}_1 + L_2\dot{x}_2 + \int_0^{x_2} f_2(x_2)\,dx_2$$

и рассматривается поведение характеристик, начальные значения которых находятся в R.

Ю. А. Митропольский

3749. О решениях общего уравнения ньютоновского потенциала жидкой сферы, находящейся в равновесии. Чимино (Sulle soluzioni dell'equazione generale del potenziale newtoniano di una sfera fluida in equilibrio. Ciminо Massimo), Boll. Unione mat. ital., 1953, 8, ser. 3, № 2, 164—172 (итал.)

Исследуется решение уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right) + x^\lambda f(y) = 0,\ \lambda > 0, \quad (1)$$

удовлетворяющее условиям: $y(x) > 0$, $y'(x) < 0$ ограничены и непрерывны при $0 < x \leqslant x^*$, $\lim_{x\to+0} y(x) = C$, $0 < C < \infty$; $f(y)$ — ограниченная, непрерывная, положительная и не убывающая при $0 \leqslant y < +\infty$; $f(0) = 0$, $f'(y) = |f'(y)| \leqslant L$, $0 \leqslant y \leqslant C$, $L = \text{const}$. При помощи сведения дифференциального уравнения (1) к интегральному уравнению

$$y(x) = C - x^{-1}\int_0^x (x - t)\,t^{\lambda-1} f[y(t)]\,dt \quad (2)$$

и решения последнего методом последовательных приближений доказывается теорема существования и единственности. Эта теорема имеет место, если x^* удовлетворяет неравенству $x^* < [C\lambda(\lambda+1)/f(C)]^{1/\lambda}$.

При помощи уравнения (2) доказывается теорема относительно поведения $y'(x)$ при $x \to +0$, а также следующая теорема сравнения: Если $f_1(y)$, $f_2(y)$ удовлетворяют требуемым условиям, $f_1(y) < f_2(y)$ при $0 < y < C$, $f_1(C) = f_2(C) = K$, то для решений уравнения (1), где $f(y)$ соответственно заменяется функциями $f_1(y)$ и $f_2(y)$ при $0 < x \leqslant x^* < [C\lambda(\lambda+1)/K]^{1/\lambda}$, выполняется неравенство $y_1(x) > y_2(x)$. Из теоремы сравнения вытекают следствия относительно расположения интегральной кривой $y(x)$ и ее первых нулей.

С. А. Гальперн и Ю. В. Сидоров

3750. О периодических решениях дифференциального уравнения нелинейных колебаний при наличии сил «сухого» и «вязкого» трения. Штейнберг Т. С., Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1954, № 4, 13—22

Рассматривается уравнение

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = \delta m + \psi(x, \dot{x}), \quad (1)$$

где n, k, m — постоянные, $\psi(x, y)$ — удовлетворяет условиям Липшица в любой ограниченной области, не включающей ось $y = 0$,

$$\delta = \begin{cases} +1 \text{ для } \dot{x} < 0 \text{ и } \dot{x} = 0 \text{ при } x > 0 \\ -1 \text{ для } \dot{x} > 0 \text{ и } \dot{x} = 0 \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Для отыскания и оценки периодических решений строится система топографических кривых $F(x, y) = c$, получаемая преобразованием подобия из периодической траектории вспомогательного уравнения

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = \delta m. \quad (2)$$

Пусть уравнение (2) имеет периодическое решение. Если существуют положительные числа a, c_1 и c_2, удовлетворяющие условиям $a < |m|$, $|(c_i - 1)m/c_i| = a_i$, $|\psi(x, y)| < a$ на кривых $F(x, y) = c_1$ и $F(x, y) = c_2$, то кольцевая область G, ограниченная кривыми $F = c_1$ и $F = c_2$, обладает тем свойством, что фазовые траектории (1) либо только входят в нее, либо только выходят. Если при этом на отрезках оси $y = 0$, заключенных в G, $\delta m - k^2x + \psi(x, 0) \neq 0$, то уравнение (1) имеет по крайней мере одну периодическую траекторию, лежащую в G. G стягивается к периодическому решению уравнения (2) при $a \to 0$.

В качестве примера рассматриваются уравнения

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = \delta m + g\delta|\dot{x}|^q x^{2p},$$

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = \delta m + \delta^{p+1}[g_1x^p + g_2\dot{x}^p],$$

где $mn<0$, $k^2>n^2$, $p>0$ — целое число, $q>0$, g_1, g_2, g — постоянные. Для них выясняются условия существования периодических решений, устойчивость этих решений и указывается оценка кольцевых областей, содержащих периодические траектории.

Н. Н. Красовский

3751. Вынужденные колебания с вязким затуханием и сильным трением скольжения. Рейссиг (Erzwungene Schwingungen mit zäher Dämpfung und starker Gleitreibung. Reissig Rolf), Math. Nachr., 1954, **11**, № 4—5, 231—238 (нем.)

Рассматривается решение уравнения

$$\ddot{x}+D\dot{x}+\mu\operatorname{sign}\dot{x}+x=\Phi(t),$$

где D и μ — положительные постоянные, $\Phi(t)$ — непрерывная периодическая функция t, причем $\max\Phi(t)-\min\Phi(t)\leqslant 2\mu$. Доказывается, что: 1) Существует конечный предел $x(t)$ при $t\to+\infty$. 2) $\dot{x}(t)\to 0$ при $t\to+\infty$.

Примечание референта. В статье имеются излишние ограничения на $\Phi(t)$. А. В. Драгилев

3752. Исследование спектра и разложение по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка на полуоси. Наймарк М. А., Тр. Моск. матем. о-ва, 1954, **3**, 181—270

Подробно излагаются результаты, опубликованные ранее (Докл. АН СССР, 1952, 85, № 1, 41—44; РЖМат, 1953, 243). Изучается дифференциальный оператор

$$l(y)\equiv -y''+p(x)y,\quad 0\leqslant x<\infty, \tag{1}$$

с граничным условием

$$y'(0)-\theta y(0)=0, \tag{2}$$

где $p(x)\in L(0,\infty)$ — комплексная функция и θ — комплексное число. Обозначим через y_1, y_2 и $\widetilde{y}_2$ решения уравнения

$$l(y)=\lambda(y), \tag{3}$$

удовлетворяющие условиям: $y_1=e^{isx}\{1+O(s^{-1})\}$, $y_2=e^{-isx}\{1+O(s^{-1})\}$, $s=\sqrt{\lambda}$, $|s|\to\infty$, $\operatorname{Im}s>0$, $\widetilde{y}_2=e^{-isx}\{1+O(s^{-1})\}$, $s>0$, $s\to\infty$.

Изучается асимптотическое поведение этих решений при $x\to\infty$, на основе которого подробно исследуется спектр оператора (1) — (2). Автор получает следующий результат: во всей комплексной λ-плоскости, за исключением положительной полуоси, спектр оператора (1) — (2) есть ограниченное множество, состоящее из конечного или счетного числа собственных значений. Предельные точки этого множества могут находиться только на полуоси $\lambda\geqslant 0$, все точки которой являются точками непрерывного спектра. Этот результат усиливается автором в различных направлениях. В частности, если при некотором $\varepsilon>0$

$$\int_0^\infty e^{\varepsilon x}|p(x)|\,dx<\infty, \tag{4}$$

то оператор (1) — (2) может иметь только конечное число собственных значений, ни одно из которых не находится на полуоси $\lambda\geqslant 0$.

Основная часть работы посвящена разложению ядра резольвенты $K(x,\xi;\lambda)$ оператора (1) — (2) по собственным функциям задачи (3) — (2). Доказывается, что если выполняется условие (4) и оператор (1) — (2) не имеет кратных собственных значений, то для каждой точки λ, не принадлежащей спектру,

$$K(x,\xi,\lambda)=\sum_{k=1}^{r}y_k(x)\,y_k(\xi)\,(\lambda_k-\lambda)^{-1}\Big[\int_0^\infty y_k^2(x)\,dx\Big]^{-1}-$$
$$-\int_0^\infty\widetilde{y}(x,s)\widetilde{y}(\xi,s)\,[2\pi(s^2-\lambda)\,A(s)\widetilde{A}(s)]^{-1}ds, \tag{5}$$

причем λ_k — собственные значения, а y_k — соответствующие собственные функции оператора (1) — (2); $\widetilde{y}(x,s)$ — решение задачи (3) — (2) для $\lambda>0$ ($\lambda=s^2$); $A(s)=y_1'(0,s)-\theta y_1(0,s)$, $\widetilde{A}(s)=\widetilde{y}_2'(0,s)-\theta\widetilde{y}_2(0,s)$. Формула (5) обобщается на случай кратного спектра, а также на случай, когда вместо условия (4) выполняются условия: $x^2p(x)\in L(0,\infty)$, функции $A(s)$ и $\widetilde{A}(s)$ не обращаются в нуль для $s\gg 0$.

Имея интегральное представление резольвенты, нетрудно получить теорему разложения по собственным функциям оператора (1) — (2). Эту теорему автор получает при следующих предположениях: 1) $f(x)\in L(0,\infty)$; 2) $f'(x)$ абсолютно непрерывна в каждом конечном интервале $(0,a)$; 3) $l(f)\in L(0,\infty)$ и 4) $f'(0)-\theta f(0)=0$. Формулу (5) автор получает с помощью предельного перехода от конечного интервала. Этот переход намного сложней, чем в самосопряженном случае.

Б. М. Левитан

3753. Теория возмущений непрерывного спектра обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Мозер (Störungstheorie des kontinuierlichen Spektrums für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Moser Jürgen), Math. Ann., 1953, **125**, № 4, 366—393 (нем.)

Рассматривается зависящее от вещественного параметра ε дифференциальное выражение

$$l_\varepsilon(u)\equiv k^{-1}(x)\,[-(p(x)\,u')'+q(x,\varepsilon)\,u],$$
$$-\infty\leqslant a<x<b\leqslant\infty, \tag{1}$$

$$q(x,\varepsilon)=\sum_{\nu=0}^{\infty}q_\nu(x)\,\varepsilon^\nu, \tag{2}$$

$p(x)$, $q(x)$ непрерывны и положительны в интервале (a,b); функции $q_\nu(x)$ вещественны и непрерывны всюду, кроме, может быть, общих им всем точек разрыва, образующих конечное или счетное множество, не имеющее предельных точек внутри (a,b); ряд (2) сходится равномерно в каждом замкнутом конечном подинтервале интервала (a,b); при $\varepsilon=0$ для уравнения $l_\varepsilon(u)=\lambda u$ и на левом конце $x=a$ имеет место случай предельного круга, а на правом конце $x=b$ — случай предельной точки.

В гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ всех измеримых функций $u(x)$, удовлетворяющих условию $\int_b^a|u(x)|^2\times k(x)\,dx<\infty$, дифференциальное выражение $l_\varepsilon(u)$ порождает дифференциальный оператор $L_\varepsilon(u)=l_\varepsilon(u)$, область определения $\mathfrak{L}_\varepsilon$ которого есть совокупность всех дифференцируемых $u(x)$, $a<x<b$, для которых $p(x)u'$ абсолютно непрерывна в каждом замкнутом конечном подинтервале интервала (a,b) и для которых $l_\varepsilon(u)\in\mathfrak{H}$.

Пусть $\mathfrak{M}_\varepsilon$ — совокупность всех непрерывно дифференцируемых в (a,b) комплекснозначных функций $\alpha(x)$ таких, что $[\alpha,u]_a=\lim_{x\to a}[\alpha,u]_x$ существует для всех $u\in\mathfrak{L}_\varepsilon$, где

$$[u,v]_x=p(x)\,(u(x)\,v'(x)-u'(x)\,v(x)).$$

Выбрав в $\mathfrak{M}_\varepsilon$ две функции α, β так, что $[\alpha,\bar{\alpha}]_a=[\beta,\bar{\beta}]_a=0$, $[\alpha,\beta]_a=1$, можно построить два решения $\varphi_\varepsilon(x,\lambda)$, $\vartheta_\varepsilon(x,\lambda)$ уравнения $l_\varepsilon(u)=\lambda u$, удовлетворяющих условиям $[\alpha,\varphi_\varepsilon]_a=0$, $[\beta,\varphi_\varepsilon]_a=-1$, $[\alpha,\vartheta_\varepsilon]_a=1$; $[\beta,\vartheta_\varepsilon]_a=0$. Основные результаты состоят в следующем:

1. Если при некотором l выполняется условие

$$\int_a^b\Phi^2(x,l)\,|q_\nu(x)|\,dx\leqslant\gamma K^{\nu-1},\quad\nu=1,2,3,\ldots, \tag{3}$$

где $\Phi(x, l) = (|\varphi_0(x, l)|^2 + |\vartheta_0(x, l)|^2)^{1/2}$, а γ, K — положительные постоянные, то а) $\mathfrak{M}_\varepsilon = \mathfrak{M}_0$ при $|\varepsilon| < (\gamma + K)^{-1}$; б) при $|\varepsilon| < (\gamma + K)^{-1}$ для уравнения $l_\varepsilon(u) = \lambda u$ в точке $x = a$ имеет место случай предельного круга, а при $|\varepsilon| < (4(\gamma + K))^{-1}$ в точке $x = b$ имеет место случай предельной точки. Из а) следует, что при $|\varepsilon| < (\gamma + K)^{-1}$ для дифференциального выражения $l_\varepsilon(u)$ можно поставить краевое условие $[\alpha, u]_a = 0$, не зависящее от ε.

Пусть L_ε — дифференцируемый оператор, порожденный дифференциальным выражением $l_\varepsilon(u)$ и этим краевым условием, функция

$$\chi(x, \lambda) = \vartheta_0(x, \lambda) + m_0(\lambda)\varphi_0(x, \lambda), \quad \lambda = l + i\delta,$$

однозначно определена условием $\chi(x, \lambda) \in \mathfrak{H}$; $\rho_\varepsilon(\lambda)$ — спектральная функция оператора L_ε, отвечающая фундаментальной системе $\varphi(x, \lambda)$, $\vartheta(x, \lambda)$, а $E_\varepsilon(\lambda)$ — разложение единицы оператора L_ε.

2. Пусть (3) имеет место для всех $l \in \Delta = [\lambda_1, \lambda_2]$ и, кроме того, для тех же l и для $0 < \delta < \delta_0$, $a < x < b$

$$|\chi(x, l + i\delta)| \leqslant C\Phi(x, l), \qquad (4)$$

где C и δ_0 — некоторые постоянные. Тогда существует функция

$$r(l, \varepsilon) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu r_\nu(l)$$

($|\varepsilon| < \varepsilon_1 = (2(C + 1)(\gamma + K))^{-1}$, $l \in \Delta$, $r_\nu(l)$ ρ_0-измеримы в Δ и $|r_\nu(l)| \leqslant \varepsilon_1^{-\nu}$) такая, что для любого $\Delta' \subset \Delta$

$$\rho_\varepsilon(\Delta') = \int_{\Delta'} r(l, \varepsilon)\, d\rho_0(l) = \sum \varepsilon^\nu \int_{\Delta'} r_\nu(l)\, d\rho_0(l).$$

3. Пусть $\Phi(x)$ — положительная и непрерывная в (a, b) функция и выполнены условия предложения 2 с $\Phi(x)$ вместо $\Phi(x, l)$. Если, кроме того,

$$\varphi_0^2(x, l) + \vartheta_0^2(x, l) \leqslant \Phi^2(x), \; l \in \Delta, \; a < x < b,$$

то для любого $\Delta' \subset \Delta$ и $|\varepsilon| < \varepsilon_1$

$$E(\Delta', \varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu E_\nu(\Delta'),$$

где $E_\nu(\Delta')$ — ограниченные эрмитовы операторы, удовлетворяющие условию $|E_\nu(\Delta')| \leqslant (\nu + 1)^2 (C + 2)^2/\varepsilon_2^\nu$.

4. Если условия предложения 3 выполнены на всем спектре невозмущенного оператора L_0, то при $|\varepsilon| < \varepsilon_1/4$ операторы L_0 и L_ε унитарно эквивалентны. При этом оператор $U(\varepsilon)$, переводящий L_ε в L_0, имеет вид $U(\varepsilon) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu U_\nu$, где $|U_\nu| \leqslant 2^\nu/\varepsilon_1^\nu$.

Результаты применяются к возмущениям уравнений: Хилла, уравнения $-u'' = \lambda u$; уравнения $-u'' + q_0(x)u = \lambda u$, где $q_0(x) < 0$, $q_0(x) \to -\infty$ и $0 < -q_0'(x) = O(|q_0(x)|^c)$, $0 < c < 0{,}5$ при $x \to \infty$, $q_0''(x)$ непрерывна и сохраняет знак и $\int_0^\infty |q_0(x)|^{-1/2}\, dx = \infty$.

М. А. Наймарк

3754. О некоторых случаях эффективного определения плотности неоднородной струны по ее спектральной функции. Крейн М. Г., Докл. АН СССР, 1953, **93**, № 4, 617—620

Пусть S — некоторая струна, натянутая единичной силой между $x = 0$ и $x = L\,(\leqslant \infty)$, а $M(x) > 0$ $(0 < x < L)$ — масса отрезка $[0, x)$ этой струны ($M(0) = 0$; $\lim_{x \to L} M(x) = M(L)$). Если струна совершает гармонические колебания $u(x, t) = y(x) \sin \sqrt{\lambda}\, t$, то $y(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$y(x) = y(0) + y'(-0)\, x - \lambda \int_0^x (x - s)\, y(s) dM(s) \quad (0 \leqslant x < L).$$

Решение этого уравнения при $y(0) = 1$, $y'(-0) = 0$ ($y(0) = 0$, $y'(-0) = 1$) обозначим через $\varphi(x, \lambda)$ ($\psi(x, \lambda)$). Тогда коэффициент динамической податливости струны

$$\Gamma(\lambda) = \lim_{x \to L} \psi(x, \lambda)/\varphi(x, \lambda) =$$

$$= \int_0^\infty d\tau(t)/(t - \lambda) \quad (\lambda \in \overline{(0, \infty)}),$$

где неубывающая функция $\tau(t)$ называется главной спектральной функцией струны S (см. работу автора, Докл. АН СССР, 1952, 87, № 6, 881—884).

Теорема 1. Для того чтобы неубывающая функция $\tau(\lambda)$ $(0 \leqslant \lambda < \infty$; $\tau(0) = 0)$ была главной спектральной функцией некоторой струны S, необходимо и достаточно, чтобы $\int_0^\infty d\tau(\lambda)/(1 + \lambda) < \infty$, при этом струна S (т. е. $M(x)$) однозначно определяется функцией $\tau(\lambda)$.

Пусть S и S^* — две различные струны, которые соответствуют функции $M(x)$, $\tau(\lambda)$ и $M^*(x)$, $\tau^*(\lambda)$.

Теорема 2. 1) Если $\tau^*(\lambda) = \tau(k\lambda)$, то $M^*(x) = M(k^{-1}x)$; 2) если $\tau^*(\lambda) = k\tau(\lambda)$, то $M^*(x) = k^{-1}M(k^{-1}x)$; 3) если $\tau^*\lambda = \tau(\lambda) + \delta$, то $M^*(x) = M(\xi)(1 - \delta M(\xi))^{-1}$, $x = \int_0^\xi [1 - \delta M(s)]^2 ds$ $(0 \leqslant \xi < L)$; 4) если $\sigma^*(\lambda) = \tau(\lambda - a)$, то $M^*(x) = \int_0^\xi \varphi^2(s; -a)\, dM(s)$, $x = \psi(\xi; -a)/\varphi(\xi; -a)$; 5) если $\tau^*(\lambda) = \int_0^\lambda (\mu + a)\, d\tau(\mu)$, то $M^*(x) = a^{-2} \int_0^\xi \frac{\varphi'^2(s; -a)}{\varphi^2(s; -a)} ds$, $x = a^2 \int_0^\xi \frac{\varphi^2(x; -a)\, dM(x)}{\varphi'(x - 0; a)\, \varphi'(x + 0; a)}$.

Пользуясь правилами сравнения теоремы 2, можно в ряде случаев найти $M(x)$ по $\tau(\lambda)$ в явном виде. В качестве примера автор дает решение обратной задачи при $d\tau = P(\lambda)(\pi\sqrt{\lambda}Q(\lambda))^{-1}d\lambda$, где $Q(\lambda)$ — многочлен, положительный при $\lambda \geqslant 0$, $P(\lambda)$ — многочлен с вещественными неотрицательными нулями степени не выше $Q(\lambda)$.

В. А. Марченко

3755. Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи. Крейн М. Г., Докл. АН СССР, 1953, **94**, № 6, 987—990

Обозначения см. реф. 3754. Преобразование Фурье — Бохнера

$$\int_0^\infty \lambda^{-1}(1 - \cos\sqrt{\lambda}\, t)\, d\tau(\lambda) = \Phi(t)$$

главной спектральной финкции $\tau(\lambda)$ некоторой струны S автор называет главной переходной функцией этой струны. Если левый конец струны может свободно скользить по направлению, перпендикулярному оси X, то функция $\Phi(t)$ описывает движение этого конца, вызванное единичной силой, приложенной к нему в момент $t = 0$. Это движение не зависит от условий закрепления правого конца струны в интервале $0 \leqslant t < 2T$, где $T = t(L) \leqslant \infty$, а $t(x) = \int_0^x \sqrt{M'(\xi)}\, d\xi$.

Теорема 1. Для того чтобы непрерывная функция $\Phi(t)$ $(0 \leqslant t < 2A$; $A \leqslant \infty)$ совпадала на интервале $[0, 2A)$ с главной переходной функцией некоторой струны S, необходимо и достаточно, чтобы: 1) $\Phi(0) = 0$ и 2) ядро $L(s, t) = \Phi(s) + \Phi(t) - \Phi(|s - t|)$ было положительно определенным в квадрате $0 \leqslant s, t < 2A$.

Теорема 2. Пусть функция $\Phi(t)$ имеет абсолютно непрерывную производную в $[0, 2A)$ при любом $a < A$. Для того чтобы $\Phi(t)$ совпадала на $[0, 2A)$ с главной переходной функцией некоторой струны S, необходим и достаточно, чтобы при любом $a < A$ и любой непре-

ывной функции $q(s)$ $(-a \leqslant s \leqslant a)$ выполнялось нера-
енство:

$$\Phi'(0)\int_{-a}^{a} q^2(s)\,ds + \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} \Phi''(|s-t|)\,q(s)\,q(t)\,ds\,dt \geqslant 0.$$

Теорема 3. Если при некотором $a < T$ $(a > 0)$ интегральное уравнение

$$2\Phi'(0)\,q(t) + \int_{-a}^{a} \Phi''(|s-t|)\,q(s)\,ds = 1$$

меет интегрируемое решение $q(t, a)$, то оно единствен-
о и при любом комплексном λ

$$\int_{-a}^{a} q(t;\ a)\cos\lambda t\,dt = \int_0^{x_a} \varphi(x;\lambda^2)\,dM(x) = -\lambda^{-2}\varphi'(x_a - 0;\ \lambda^2),$$

частности $\int_{-a}^{a} q(t;\ a)\,dt = M(x_a)$, где x_a — наимень-
ий корень уравнения $t(x) = x_a$ и функции $\varphi(x;\ \lambda^2)$ —
же что в реф. 3754.

Таким образом решение обратной краевой задачи в
ом случае сводится к решению интегрального уравне-
я теоремы 3, аналогично тому, как в методе Л. М. Гель-
нда — Б. М. Левитана (Изв. АН СССР, 1951, **15**, № 4,
9—360) решение обратной краевой задачи для урав-
ния $y'' + (\lambda - q(x))\,y = 0$ сводится к некоторому ин-
гральному уравнению. Далее в работе приводятся
есть примеров функций $\Phi(t)$, для которых это инте-
альное уравнение можно решить в явном виде.

В. А. Марченко

56. Теорема разложения для сингулярных самосопряженных линейных дифференциальных операторов. Левинсон (The expansion theorem for singular self-adjoint linear differential operators. Levinson Norman), Ann. Math., 1954, **59**, № 2, 300—315 (англ.)

Пусть $L \equiv p_0(d/dt)^n + p_1(d/dt)^{n-1} + \ldots + p_n$, где
— комплексные функции t с $n-j$ непрерывными произ-
дными в открытом интервале (a,b). Пусть $p_0 \neq 0$ в (a, b) и
ератор L формально самосопряжен. Обозначим через c
ксированную точку внутри $(a,\ b)$ и через $\varphi_k(t, \lambda)$
пения уравнения

$$L(x) + \lambda x = 0, \qquad (1)$$

овлетворяющие начальным условиям $\varphi_k^{(j-1)}(c,\ \lambda) = \delta_k^j$,
$k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Известно (см., например, заметку референта в Докл.
СССР, 1950, **73**, № 4, 651—654), что для каждого
мосопряженного оператора L существует по крайней
ре одна монотонная матрица-функция $\rho(\lambda) =$
$\{\rho_{jk}(\lambda)\}_{j,k=1}^{n}$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ такая, что для каждой
нкции $f(t) \in L^2(a, b)$ справедливо равенство Парсеваля

$$\int_b^a |f(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum g_j(\lambda)\overline{g}_k(\lambda)\,d\rho_{jk}(\lambda),$$

$$g(\lambda) = \int_a^b f(t)\overline{\varphi}_k(t,\ \lambda)\,dt.$$

В реферируемой работе изучается вопрос об единст-
енности матрицы $\rho(\lambda)$. Доказывается теорема: Если
авнения

$$L(x) \pm ix = 0 \qquad (2)$$

имеют решений с интегрируемым квадратом, то ма-
ица $\rho(\lambda)$ единственна.

ту теорему можно получить, используя теорию ли-
ных операторов в пространстве Гильберта, однако
ор обходится без нее.

Рассматривается также случай, когда конец a регу-
ен. В этом случае в точке a следует поставить не-
которое число (самопряженных) граничных условий, а функцию с интегрируемым квадратом разлагать по решениям уравнения (1), удовлетворяющим этим же условиям. Теорема о единственности матрицы $\rho(\lambda)$ имеет место и в этом случае, если только уравнения (2) не имеют решений с интегрируемым квадратом, которые удовлетворяют поставленным в точке a граничным условиям.

Примечание референта. В случае уравнения второго порядка на полупрямой $(0, \infty)$ матрица $\rho(\lambda)$ есть функция и ее единственность во многих случаях может быть доказана прямым вычислением (см. монографию референта «Разложение по собственным функциям», 1950, гл. III). Б. М. Левитан

3757. Линейные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Теоремы существования. Конти (I problemi ai limiti lineari per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie: Teoremi di esistenza. Conti Roberto), Ann. mat. pura ed appl., 1953, **35**, 155—182 (итал.)

Рассматривается система уравнений

$$y_i' = F_i y_{i+1} + \varphi_i \ (i = 1,\ \ldots,\ k-1),\ y_k' = \varphi_k,$$

где функции $F_i(i = 1,\ \ldots,\ k-1)$ и $\varphi_i(i = 1,\ \ldots,\ k)$ определены при $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, $|y_i| < \infty$ $(i = 1,\ \ldots,\ k)$, и «типа Каратеодори», т. е. непрерывны по $y = (y_1, \ldots, y_k)$, измеримы по x и мажорируются суммируемой на $[\alpha, \beta]$ функцией $M(x)$. Краевое условие имеет вид $y_i(\xi_{\nu i}) = \eta_{\nu i}$ $(i = 1,\ \ldots,\ k;\ 1 \leqslant \nu \leqslant \nu_i;\ 0 \leqslant \nu_i \leqslant k;\ \nu_1 + \ldots + \nu_k = k)$, где все $\xi_{\nu i}$ — точки интервала (α, β). С этой краевой задачей ассоциируется определитель D матрицы, $\left(\sum_{j=1}^{i-1} \nu_j + \nu\right)$-я строчка которой состоит из $i-1$ нулей и далее из чисел

$$1,\ \int_\alpha^{\xi_{\nu i}} F_i(t_1,\ y)\,dt_1,\ \int_\alpha^{\xi_{\nu i}} dt_1 \int_\alpha^{t_1} F_i(t_1,\ y)\,F_{i+1}(t_2, y)\,dt_2, \ldots,$$
$$\int_\alpha^{\xi_{\nu i}} \ldots \int_\alpha^{t_{k-i-1}} F_i(t_i,\ y) \ldots F_k(t_{k-1},\ y)\,dt_{k-i}.$$

Основная теорема 1 гласит, что если $\inf_{(y)} |D| = d > 0$, то поставленная краевая задача имеет по крайней мере одно решение (понимаемое в смысле Каратеодори). При доказательстве используются метод Тонелли (см. например, Сансоне. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 1, М., 1953, 42), известная теорема Асколи о компактности семейства непрерывных функций и представляющая самостоятельный интерес лемма о существовании решения системы уравнений вида $a_{i1}(y)\,y_1 + \ldots + a_{ik}(y)\,y_k = C_i(y)$ $(i = 1,\ \ldots,\ k)$, выводимая, в свою очередь, из теоремы Брауера о существовании неподвижной точки.

Различные частные случаи приводят к краевым задачам, рассматривавшимся рядом авторов (дается библиография). Отметим случаи $\nu_i = 1$ $(i = 1,\ \ldots,\ k)$, когда $D \equiv 1$; $F_i \equiv 1$ $(i = 1,\ \ldots,\ k-1)$, когда D не зависит от y и непосредственно связан с одной из задач интерполирования; краевую задачу $u_i'' = p_i(x,\ u_1,\ u_1',\ u_2,\ u_2')$ $(i = 1, 2)$, $u_i(\xi_j) = \eta_{ij}$ $(i = 1, 2;\ j = 1, 2)$, когда $D = (\xi_2 - \xi_1)^2$ (конечно, после перехода к системе 1-го порядка); системы типа Николетти; уравнение с параметром вида $y^{(h)} = \lambda f(x,\ y, y', \ldots,\ y^{(h-1)})$, которое эквивалентно системе $y_i' = y_{i+1}$ $(i = 1,\ \ldots,\ h-1)$, $y_h' = f(x,\ y_1, \ldots, y_h)\,y_{h+1}$, $y_{h+1}' = 0$, а также системы более общего вида. Укажем, например, на краевую задачу

$$y_i' = y_{i+1} + \varphi_i(x, y) (i = 1, \ldots, k-2),$$
$$y_{k-1}' = f(x, y) y_k + \varphi_{k-1}(x, y),$$
$$y_k' = \varphi_k(x, y),$$
$$y_i(\xi_1) = \eta_i (i = 1, \ldots, k-2), \quad y_1(\xi_2) = \eta_{k-1},$$
$$y_1(\xi_3) = \eta_k (\xi_1 < \xi_2 < \xi_3),$$

где неравенство $d > 0$ гарантируется, если для некоторой суммируемой на $[\alpha, \beta]$ функции $p(x)$ гарантируются неравенства $p(x) \leqslant f(x, y)(y_1, \ldots, y_k$ — любые), $\int_{\xi_1}^{\xi_2} G(\xi_2, t) p(t)\, dt < 0$, где $G(x, t)$ — функция Грина краевой задачи $u^{(k-1)}(x) = 0$, и $(\xi_1) = u'(\xi_1) = \ldots = u^{(k-3)}(\xi_1) = 0, u(\xi_3) = 0$. Рассматриваются также системы с несколькими параметрами. Более общая теорема 2 утверждает, что ограничения, наложенные на функции φ_i, можно ослабить, потребовав только, чтобы

$$|\varphi_i(x, y)| \leqslant r_1(x)\, \Phi\left(\sqrt{\Sigma y_i^2}\right) + r_2(x) (i = 1, \ldots, k),$$

где функции $r_1(x)$ и $r_2(x)$ суммируемы, а функция $\Phi(u)$ $(0 \leqslant u < \infty)$ неотрицательна, не убывает и хотя бы для одного u удовлетворяет неравенству $\Phi(u) \leqslant au - b$, где числа a и b определенным (указанным в формулировке теоремы) способом строятся по функциям $r(x)$, $F(x, y)$ и числам η, k, d. В заключение указаны более общие краевые задачи, поддающиеся изучению таким же методом; приведен ряд работ (итальянских авторов), посвященных аналогичным вопросам.

Опечатки в основных формулировках: на стр. 160, строка 12 снизу, должно быть $d > 0$ вместо $d \geqslant 0$; на стр. 170 в условиях (L_2) должно быть h вместо $h-1$ и η_i вместо η_i; на стр. 173, строка 12 сверху, должно быть y_{h+1} вместо y_h; на стр. 176 в условии (L_4) должно быть y_{2i-1} вместо y_i. А. Д. Мышкис

3758. **Об одной краевой задаче для дифференциального уравнения $y^n = f(x, y, y', \ldots, y^{n-1}, \lambda)$.** **Вольпато** (Sopra un problema di valori al contorno per l'equazione differenziale $y^n = f(x, y, y', \ldots, y^{n-1}, \lambda)$. Volpato Mario), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1954, 23, № 1, 224—244 (итал.)

Рассматривается краевая задача

$$y^{(n)} = f(x, y, \ldots, y^{(n-1)}, \lambda); \; y(x_1) = c_1,$$
$$y(x_2) = c_2, \ldots, y(x_{n+1}) = c_{n+1}.$$

Пусть вещественная функция $f(x, y, \ldots, y^{(n-1)}, \lambda)$ определена при $\alpha \leqslant x \leqslant b$, $-\infty < y, \ldots, y^{(n-1)} < \infty$, $\alpha < \lambda < \beta$, измерима по x и непрерывна по $(y, \ldots, y^{(n-1)}, \lambda)$; пусть $a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} \leqslant b$. Предположим, что существуют функции $p(x, \lambda)$, $q(x, \lambda)$ $(a \leqslant x \leqslant b, \alpha < \lambda < \beta)$, суммируемые по x и непрерывные и монотонные по λ, для которых

$$p(x, \lambda) \leqslant f(x, y, \ldots, y^{(n-1)}, \lambda) \leqslant q(x, \lambda)$$

и, кроме того, для некоторых c и d, $\alpha < c < d < \beta$,

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \varphi_\nu(t) q(t, c)\, dt \leqslant (n-1)!\, K \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \varphi_\nu(t) p(t, d)\, dt,$$

либо

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \varphi_\nu(t) q(t, d)\, dt \leqslant (n-1)!\, K \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \varphi_\nu(t) p(t, c)\, dt.$$

Здесь $K = c_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} c_j \prod_{i=1;\, i \neq j}^{n} (x_{n+1} - x_i)/(x_j - x_i$

$$\varphi_\nu(t) = (x_{n+1} - t)^{n-1} -$$
$$\sum_{j=\nu+1}^{n} (x_j - t)^{n-1} \times \prod_{i=1;\, i \neq j}^{n} \frac{x_{n+1} - x_i}{x_j - x_i}.$$

($\nu = 1, \ldots, n$; при $\nu = n$ вычитаемое пропадает). При всех этих предположениях существует по крайней мере одно число $\lambda_0 \in [c, d]$ и по крайней мере одна функция $y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, абсолютно непрерывная вместе со своими производными до $n-1$-го порядка включительно, которые решают поставленную краевую задачу.

В качестве следствия получается, если

$$f(x, y, \ldots y^{(n-1)}, \lambda) \equiv \lambda g(x, y, \ldots, y^{(n-1)})$$

$(a \leqslant x \leqslant b; -\infty < y, \ldots, y^{(n-1)}, \lambda < \infty)$, причем функция g измерима по x и непрерывна по $(y, \ldots, y^{(n-1}$ то для существования по крайней мере одного решения поставленной краевой задачи достаточно следующего для некоторых неотрицательных суммируемых функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, $\varphi(x) \leqslant g(x, y, \ldots, y^{(n-1)}) \leqslant \psi(x)$, причем $\int_{x_1}^{x_{n+1}} \varphi(x)\, dx > 0$.

Оба эти утверждения продолжают результаты ряда авторов, работы которых указываются (см., в частности предыдущий реферат и Gianuizzi M., Ann. Univ. Ferrara, 1953, отд. 7, 2, 35—43). При доказательстве сначала изучаются функции $\varphi_\nu(t) > 0$ $(x_\nu < t < x_{\nu+1}; \; \nu = 1, \ldots,$ Далее применяется метод неподвижных точек Каччиополи (см. также статью автора Ann. Univ. Ferrara 1953, отд. 7, 2, 93—109; отметим, что здесь исправлена ошибка, допущенная в этой статье) и известный признак компактности семейства непрерывных функций.

А. Д. Мышкис

3759. **Общая линейная краевая задача для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Теоремы существования.** **Конти** (Problemi ai limiti lineari generali per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Un teorema di esistenza. Conti Roberto), Boll. Unione mat. ital., 1953, 8, ser. № 2, 153—159 (итал.)

Рассматривается система уравнений

$$y_i' = \sum_{j=1}^{3} F_{ij} y_j + \varphi_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

где F_{ij}, φ_i — действительные функции от x, y_1, y_2, в области $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, $|y_i| < \infty$, удовлетворяющие условиям Каратеодори, достаточным для существования решения. Ищется решение, удовлетворяющее условиям

$$\sum_{i=1}^{3} \gamma_{ji} y_i(\xi_j) = \eta_j \qquad (j = 1, 2, 3),$$

где $\alpha \leqslant \xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \xi_3 \leqslant \beta$, γ_{ji}, η_j — заданные числа. Доказывается, что если детерминант произведения матриц

$$\left\| \begin{matrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ 0 & E_{22} & E_{23} \\ 0 & 0 & E_{33} \end{matrix} \right\|$$

ольше некоторого положительного числа, где E_{ij} выражается через квадратуры от F_{kl}, то существует хотя ы одно решение поставленной задачи.

С. А. Гальперн, Ю. В. Сидоров

760 Д. **Динамические системы с внезапным изменением.** Хохряков А. Я. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Белорус. ун-т, Минск, 1955

761 Д. **О дифференциальных операторах, порожденных системой дифференциальных выражений второго порядка.** Биглов З. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. гос. пед. ин-т, М., 1954

762 Д. **О решении линейного дифференциального уравнения в окрестности иррегулярной точки.** Эйнасто Л. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Тартусский ун-т, Тарту, 1954.

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

763. **О первой краевой задаче для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области.** Вишик М. И., Докл. АН СССР, 1953, 93, № 1, 9—12

В полупространстве $x_n > 0$ n-мерного пространства ассматривается конечная область D', часть границы оторой лежит на плоскости $x_n = 0$. В D' заданы дифференцируемые и ограниченные функции $a_{ik}(x)$, $b_i(x)$, $k = 1,2,\ldots, n$, и ограниченная функция $c(x)$, причем равнение

$$Lu \equiv \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = h(x) \qquad (1)$$

- эллиптическое при $x_n > 0$ и параболическое, с любым ангом квадратичной формы, при $x_n = 0$; принимается, что при любых числах ξ_i

$$0 \leqslant a_{nn}(x)\xi_n^2 \leqslant C^3 \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\xi_i\xi_k,$$

$$c^2 x_n^{\alpha} \leqslant a_{nn}(x) \leqslant C^2 x_n^{\alpha}.$$

е и C — постоянные). Уравнение (1) рассматривается в бласти $D \subset D'$, часть границы которой Γ_0 лежит на лоскости $x_n = 0$; дополнительная часть границы обозначается Γ_1. Вводится пространство H функций $u(x)$ о скалярным произведением

$$[u, v] = \int_D u(x)v(x)\,dx$$

пространство R_G градиентов со скалярным произведением

$$\{Gu, Gv\} = \int_D \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)(\partial u/\partial x_i)(\partial u/\partial x_k)\,dx.$$

водится оператор G с областью определения $\dot{\Omega}(D)$ — амыкание оператора градиента, первоначально заданного на множестве $\dot{\Omega}^0(D)$ функций, которые непрерывны D, имеют кусочно-непрерывные производные и исчезают в пограничной полосе области D.

Доказывается, что: а) при $0 \leqslant \alpha < 1$ функции из (D) принимают в среднем значение нуль на любой нутренней части Γ_0; справедлива оценка

$$[u, u] \leqslant C\{Gu, Gu\}; \qquad (2)$$

) если $\alpha \geqslant 1$, то для любой гладкой функции φ, заданной на Γ_0 и равной нулю вблизи $\overline{\Gamma_0 \cap \Gamma_1}$, найдется функция из $\dot{\Omega}(D)$, принимающая значение φ на Γ_0. При $\alpha < 2$ имеет место оценка (2).

Автор ставит первую краевую задачу в случае: а) как задачу об отыскании решения уравнения (1), обращающегося в нуль на всей границе области D; в случае б) решение должно обращаться в нуль только на Γ_1, причем дополнительно предполагается, что в некоторой окрестности Γ_0 имеет место неравенство $b_n(x) \geqslant -x_n^{\alpha-1}|\ln x|^{-\delta}$, $\delta > 0$. Рассматриваются обобщенные решения $u \in \Omega(D)$ первой краевой задачи, которые определяются тождеством

$$[h, v] = -\{Gu, Gv\} - \sum_{i=1}^{n}\left[u, b_i\frac{\partial v}{\partial x_i}\right] + \left[\left(c - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial b_i}{\partial x_i}\right)u, v\right], \quad v \in \Omega^0(D).$$

Обобщенное решение существует и единственно, если

$$c(x) - {}^1/_2 \sum_{i=1}^{n} \partial b_i/\partial x_i \leqslant 0, \quad x \in D.$$

В случае б), если $b_n(x) < 0$ при $x \in \Gamma_0$, краевая задача ставится так же, как и в случае а).

Доказывается, что оператор G^{-1} вполне непрерывен, если $\beta < 2$ и

$$x_n^{\beta} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \leqslant C^2 \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\xi_i\xi_k. \qquad (3)$$

Теорема 3. Если при некотором $\beta < 2$ имеет место (3), то относительно краевых задач для уравнений (1) и $L^*v = g$ всегда имеют место три теоремы, аналогичные трем теоремам Фредгольма. Оператор L, соответствующий первой краевой задаче для уравнения (1), полуограничен и имеет дискретный конечнократный спектр.

С. Г. Михлин

3764. **О краевых задачах для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области.** Вишик М. И. Докл. АН СССР, 1953, 93, № 2, 225—228

Относительно коэффициентов уравнения

$$Lu = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = h(x), \qquad (1)$$

области D и ее границы $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ сохраняются все допущения предыдущей статьи автора (реф. 3763; сохранены прежние обозначения); дополнительно предполагается, что угол между Γ_0 и Γ_1 нигде не равен нулю. Сохраняются также определения пространств H и R_G, но определение скалярного произведения в R_G заменяется таким:

$$\{Gu, Gv\} = \int_D \left[\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_k} + \gamma^2 uv\right]dx,$$

$$\gamma = \text{const} > 0.$$

Вводится множество $\Omega^1(D)$ функций, непрерывных в D и имеющих там ограниченные кусочно-непрерывные производные. Оператор G определяется как замыкание оператора градиента, первоначально заданного на $\Omega^1(D)$. $\Omega(D)$ — область определения G. Вводится обозначение:

$$(u, v)_{\Gamma} = \int_{\Gamma} uv\,d\Gamma.$$

Доказывается, что: а) при $0 \leqslant \alpha < 1$ любая функция из $\Omega(D)$ принимает в среднем с некоторым весом ρ предельные значения на Γ; при этом

$$[u, u] + (\rho u, u)_{\Gamma} \leqslant C^2\{Gu, Gu\}, \quad C = \text{const}, \qquad (2)$$

и $\rho \geqslant 0$ всюду, кроме, может быть, точек множества $\Gamma_0 \cap \Gamma_1$; б) если $\alpha \geqslant 1$, то в $\Omega(D)$ существуют функции,

стремящиеся к бесконечности при $x_n \to 0$. Неравенство (2) остается в силе если Γ заменить на Γ_1.

Вторая краевая задача по-разному формулируется для случаев а) и б). В случае а) задача состоит в отыскании решения уравнения (1), удовлетворяющего на $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ условию

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\cos(nx)\,\partial u/\partial x_i + A(s)\,u \equiv \partial u/\partial \nu + A(s)\,u = \varphi(s).$$

Обобщенным решением называется функция из $\Omega(D)$, для которой

$$[h, v] - (\varphi, v)_\Gamma = -\{Gu, Gv\} - \left[u, \sum_{i=1}^{n} b_i\,\partial x/\partial u_i\right] + \left(\left(\sum_{i=1}^{n} b_i \cos nx - A\right)u, v\right)_\Gamma + \left[\left(c - \sum_{i=1}^{n} \partial b_i/\partial x_i + \gamma^2\right)u, v\right],$$

где v — любая функция из $\Omega(D)$, имеющая квадратично суммируемые в D обобщенные первые производные. Доказывается, что обобщенное решение второй краевой задачи существует и единственно, если выполнены условия

$$c^2 x_n \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2 \leqslant \sum_{i,k=1}^{n-1} a_{ik}\xi_i\xi_k \leqslant C_2 \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k,$$

$$c(x) - {}^1/_2 \sum_{i=1}^{n} \partial b_i/\partial x_i < -\gamma^2, \quad x \in D,$$

$${}^1/_2 \sum_{i=1}^{n} b_i \cos nx_i - A < 0, \quad x \in \Gamma \qquad (3)$$

(c, $C = \text{const}$). Если (3) не выполнено, но сумма $\sum_{i=1}^{n} \partial b_i/\partial x_i$ ограничена, то для сопряженных краевых задач имеют место три теоремы Фредгольма. Оператор L, соответствующий однородной краевой задаче, полуограничен и имеет дискретный спектр; для регулярных значений λ резольвента оператора L вполне непрерывна. Аналогичные результаты установлены в случае б).

С. Г. Михлин

3765. Регулярность распределений, определенных некоторыми дифференциальными уравнениями. Тасиро, Оно (On the regularity of distributions defined by some differential equations. Tashiro Shizuko, Ono Akira), Кюсю дайгаку ригаку-бу киё. Mem. Fac. Sci., Kyūsyū Univ., 1953, A8, № 1, 93-107 (англ.)

Для уравнения Лапласа основной результат авторов держится в теореме: Пусть T — распределение в смысле Шварца. Если $\Delta T = f$, где f — распределение типа функции и $f \in L^p$, то T — функция, удовлетворяющая на всяком компакте условию Липшица в L^q с показателем s, $0 \leqslant s \leqslant 1$, где $1/q = \sup(1/q', 0)$, $1/q' = 1/p - 2/n + s/n$ ($p \neq 1$, $q < +\infty$), n — число независимых переменных. Рассмотрен также более интересный случай итерированного волнового уравнения $\Box^k T = f$, $k \geqslant E(n/2)$, и уравнения параболического типа $(\partial/\partial x_n - \partial^2/\partial x_1^2 - \cdots - \partial^2/\partial x_{n-1}^2)\,T = f$ и доказан ряд теорем, аналогичных приведенной выше. В доказательствах употребляется представление решений при помощи фундаментальных решений и некоторые неравенства, например неравенство Харди — Литтлвуда (Hardy — Littlewood, J. London Math. Soc., 1928, 3).

Б. В. Боярский

3766. О собственных функциях колеблющейся пластинки. Боянич, Вучкович (О сопственим функцијама граничног задатка малих осцилација еластичне плоче. БојанићРанко, ВучковићВладета), Зб. радова. Српска АН, 1953, 35, № 3, 107—128 (серб.; резюме нем.)

Изучается задача на собственные значения

$$\Delta\Delta u - \lambda u = 0, \quad u|_{S'} = \partial u/\partial n|_{S'} = 0, \qquad (1$$

где S — конечная область E_2 с границей S'. Пусть $\Phi_n(P)$ — ортонормированные собственные функции задачи (1), λ_n — соответствующие собственные значения. Доказываются асимптотические формулы ($\lambda \to +\infty$, P, Q — внутри S):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^2(P)/(\lambda_n + \lambda) = {}^1/_8 \sqrt{\lambda} + O(e^{-c\sqrt[4]{\lambda}}) \quad (c > 0), \qquad (2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)/(\lambda_n + \lambda) = O(e^{-c\sqrt[4]{\lambda}}) \quad (c > 0,\ P \neq Q), \qquad (3$$

$$\sum_{\lambda_n < \lambda} \Phi_n^2(P) = \sqrt{\lambda}/4\pi + O(\sqrt[4]{\lambda}), \qquad (4$$

$$\sum_{\lambda_n < \lambda} \Phi_n(P)\,\Phi_n(Q) = O(\sqrt[4]{\lambda}) \quad (P \neq Q). \qquad (5$$

Формулы (4) и (5) получаются из формул (2) и (3) на основании следующей тауберовой теоремы, доказанной авторами: Пусть $S(u)$ имеет ограниченную вариацию на каждом конечном интервале и интеграл $f(x) = \int_0^\infty (u+x)^{-1}\,dS(u)$ сходится для $x > 0$. Если $f(x) = O(e^{-cx^{1/4}})$ ($c > 0$) при $x \to \infty$ и $S(v) - S(u) > m\sqrt[4]{u}$ для $u \leqslant v \leqslant u + u^{1/4}$, то $S(u) = O(\sqrt[4]{u})$ при $u \to \infty$.

Б. М. Левитан

3767. О задаче Трикоми. Жермен, Бадер (Sur le problème de Tricomi. Germain Paul, Bader Roger), Rend. Circolo mat. Palermo, 1953, 2, № 1, 53—70 (франц.)

Для уравнения смешанного типа

$$T(u) \equiv zu_{xx} + u_{zz} = 0 \qquad (1$$

рассматривается задача Трикоми (задача T) в области $\Delta(\Gamma, A, B)$, ограниченной двумя характеристиками AC и BC уравнения (1) и простой кривой Γ с концами в точках A и B оси Ox, целиком лежащей в полуплоскости $z \geqslant 0$; граничные условия

$$u|_\Gamma = g, \quad u|_{AC} = f, \qquad (2$$

где g и f — заданные функции.

Полагая $3y = 2z^{3/2}$, $r^2 = x^2 + y^2$, $rt = x$, уравнение (1) можно записать в виде

$$3[r^2 u_{rr} + (1 - t^2)\,u_{tt}] + 4(ru_r - tu_t) = 0. \qquad (3$$

Уравнение (1) остается инвариантным относительно преобразований независимых переменных $x' = x + \lambda$, $y' = y$ и $x' = \mu x$, $y' = \mu y$. Если $u(r, t)$ — решение (3) и $rr' = 1$, то $u'(r', t) = r^{1/3}\,u(r, t)$ — также решение (3). Таким образом существует группа G преобразований, зависящих от трех параметров, позволяющих получить решение (1), исходя из его частных решений. Группа G подробно изучается.

Уравнение (3) имеет решения вида

$$r^{-1/6-s} h_s(y^2/r^2) = r^{-1/6-s} E({}^1/_{12} + s/2, {}^1/_{12} - s/2, {}^2/_3, y^2/r^2), \qquad (4$$

где s — параметр, E — решение гипергеометрического уравнения. Эти решения легко продолжаются в полуплоскость $z > 0$. Применение преобразований группы G к решениям (4) позволяет получить новые решения, в частности функцию Римана и фундаментальные решения. Допуская существование решения задачи T, авторы

утверждают, что можно построить функцию Грина задачи T, которая обращается в нуль на дуге Γ и на характеристике BC. Единственность функции Грина следует из единственности задачи T.

Дается краткое доказательство следующих лемм и теорем:

Лемма 1. Если $x_0 < l < x_1$, то решение

$$u(l, m) = 2^{2/3}(\sqrt{3})^{-1}\pi(m-l)^{2/3}\Gamma(1/3)^{-3} \times \\ \times \int_{x_0}^{l} \tau(x)\,[(m-x)(l-x)]^{-5/6}dx$$

уравнения (1) удовлетворяет неравенству

$$\min[\tau(x), 0] \leqslant u(l, m) \leqslant \max[\tau(x), 0],$$

где $l = x - {}^2/_3(-z)^{3/2}$, $m = x + {}^2/_3(-z)^{3/2}$.

Теорема 1 (принцип экстремума). Если u есть решение уравнения (1) в $\Delta(\Gamma, A, B)$, $u|_\Gamma = g$ и $u = 0$ на одной из характеристик, ограничивающих Δ, то в Δ

$$\min(g, 0) \leqslant u \leqslant \max(g, 0).$$

Впервые принцип экстремума был сформулирован А. В. Бицадзе (Докл. АН СССР, 1950, **70**, № 4, 561—564).

Лемма 2. Если решение $u(M)$ уравнения (1) ограничено в области D, принимает вдоль дуг RK и KS полуплоскости x, $y > 0$ соответственно значения 1 и 0 и если M стремится к K вдоль дуги KP, касательная к которой в точке K не совпадает с касательными к дугам KR и KS в этой точке, то $u(M)$ принимает значения, которые в окрестности K ограничены числом $q < 1$.

Теорема 2. Пусть $\Delta_1(\Gamma_1, A, B) \supset \Delta(\Gamma, A, B)$, Γ_1 и Γ в точках A и B не имеют общих касательных. Если существует решение задачи T с произвольными данными на Γ и AC, то можно решить ее с произвольными ограниченными данными на Γ_1 и AC.

Для нормального контура при помощи функции Грина решается задача T.

Библиографий, 13 названий. М. М. Смирнов

3768. О задаче Коши для нелинейных уравнений в классе разрывных функций. Олейник О. А., Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 3, 231—233

Резюме доклада на заседании Московского математического общества от 23 марта 1954 г., результаты в основном содержатся в одноименной статье (РЖМат, 1955, 2677). Кроме определения и общих свойств решения задачи Коши

$$\partial u / \partial t + \partial\varphi(t, x, u) / \partial x = 0,\ u(0, x) = u_0(x) \\ (a \leqslant x \leqslant b), \qquad (1)$$

приводятся условия, достаточные для того, чтобы решение первой краевой (смешанной) задачи для уравнения

$$\varepsilon\partial^2 u / \partial x^2 = \partial u / \partial t + \partial\varphi(t, x, u) / \partial x \quad (\varepsilon > 0)$$

при неизменных краевых условиях и $\varepsilon \to 0$ стремилось к решению задачи (1). А. Д. Мышкис

3769. Законы сохранения в потоке сжимаемой жидкости и связанные с ними отображения. Лёвнер (Conservation laws in compressible fluid flow and associated mappings. Loewner Charles), J. Rational Mech. and Analysis, 1953, **2**, № 3, 537—561 (англ.)

Рассматриваются системы квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных

$$a_1^i u_x + a_2^i v_x + b_1^i u_y + b_2^i v_y = 0,\ i = 1, 2, \qquad (1)$$

где a_k^i, b_k^i — заданные функции u и v. Частным случаем (1) является известная система уравнений плоского безвихревого движения сжимаемой жидкости.

Выводится ряд неравенств, которые характеризуют поведение безвихревого потока сжимаемой жидкости на границе области течения. В случае сильной эллиптичности системы (1) к ней применимы результаты теории квазиконформных отображений плоских областей (М. А. Лаврентьев, Матем. сб., 1947, **21**, № 2, 285—320). Однако автор пользуется понятием сильной эллиптичности системы, несколько отличным от данного М. А. Лаврентьевым. А. В. Бицадзе

3770. Замечание к теории волн конечной амплитуды. Хант (A note on gravity waves of finite amplitude. Hunt J. N.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1953, **6**, № 3, 336—343 (англ.)

См. РЖМех, 1954, 4440

3771. Об околозвуковом обтекании конечного клина. Триллинг, Уокер (On the transonic flow past a finite wedge. Trilling L., Walker K., Jr), J. Math. and Phys., 1953, **32**, № 1, 72—79 (англ.)

См. РЖМех, 1955, 87.

3772. Об интегральном уравнении теории колеблющегося крыла в сверхзвуковом потоке. Лин, Стюарт (On an integral equation in the supersonic oscillating wing theory. Lin T. Y., Stewart H. J.), J. Aeronaut. Sci., 1953, **20**, № 10, 724—726 (англ.)

См. РЖМех, 1954, 3278.

3773 К. Курс высшей математики. Т. IV. Смирнов В. И., Изд. 3-е, 804 стр., М., Гостехиздат, 1953, 19 р. 90 к.

Часть известного пятитомного курса, включающая теорию интегральных уравнений, вариационное исчисление и систематическое изложение теории дифференциальных уравнений с частными производными.

В гл. I «Интегральные уравнения» автор рассматривает уравнения Фредгольма 2-го рода, теорию которых излагает при помощи аналитического представления резольвенты. Результаты, полученные для одномерных интегральных уравнений, распространяются на уравнения более общего вида, например на уравнения с n-кратными интегралами. После рассмотрения кусочно-непрерывных ядер излагается теория уравнений с ядрами вида

$$K(M, N) = L(M, N)\,[\rho(M, N)]^{-\alpha} \quad (0 < \alpha < n)$$

при помощи аппроксимации их непрерывными ядрами. Излагается теория уравнений с симметричным ядром при $0 < \alpha < n/2$ на базе понятия пространства непрерывных функций со скалярным произведением; приводятся элементы теории гильбертова пространства (которое, однако, остается неполным из-за отсутствия интеграла Лебега). Здесь же рассматриваются уравнения с эрмитовыми ядрами и с ядрами вида $K(x, s)p(s)$ ($K(x, s) \equiv K(s, x)$). Изложены краткие сведения о ядрах, зависящих от параметра. В дальнейшем автор переходит к уравнениям Вольтерра различного вида, в том числе к некоторым уравнениям 1-го рода. Рассматриваются нагруженные интегральные уравнения и некоторые уравнения с бесконечным промежутком интегрирования. Приводятся также элементы теории сингулярных интегральных уравнений в комплексной плоскости.

В гл. II «Вариационное исчисление» после предварительных соображений выведены уравнения Эйлера и Остроградского для вариационных задач различного вида. Разобран ряд интересных примеров. Далее автор переходит к геометрической теории экстремалей. Проводится исследование второй вариации и изложение достаточных условий экстремума. В качестве применения общих методов выводятся уравнения колебаний различных сред. В заключение подробно рассматриваются некоторые задачи на абсолютный экстремум (в том числе задача о минимуме интеграла Дирихле).

В гл. III «Общая теория уравнений с частными производными» сначала излагается теория характеристик по Коши для линейных и нелинейных уравнений 1-го порядка. Далее привлекается лемма Хаара (отметим, что если понятие корректности ввести так, как на стр. 338, то она не будет иметь места для рассматриваемой задачи; аналогичная неточность имеется в конце стр. 480). Другой метод интегрирования основан на понятиях полного, общего и особого интегралов. После исследования вопроса о совместности системы уравнений изучаются полные и якобиевы системы, а также скобки Пуассона. В заключение излагается теорема Коши—Ковалевской для нелинейного уравнения 1-го порядка.

Теория уравнений высших порядков начинается с классификации уравнений 2-го порядка; излагаются краткая теория характеристик и бихарактеристик. Далее автор излагает метод Римана интегрирования линейных уравнений 2-го порядка гиперболического типа на плоскости при различных краевых условиях. Для уравнения $u_{tt}=c^2(x,y,z)\Delta u$ рассмотрено обобщение С. Л. Соболева формулы Кирхгофа. Теоремы о единственности и непрерывной зависимости решения задачи Коши для общего линейного гиперболического уравнения 2-го порядка излагаются на основе теоремы Соболева об оценке функций через интегралы от производных. Вводится понятие обобщенного решения линейных уравнений 2-го порядка. Далее автор для уравнений Лапласа и Пуассона показывает некорректность постановки задачи Коши, свойства аналитичности решений и свойства обобщенных решений. Для систем уравнений рассмотрены понятие характеристики и основные типы систем, а также сильные и слабые разрывы. Результаты применяются к анализу систем уравнений гидродинамики, теории упругости и Максвелла. Приводится краткая теория почти линейных систем гиперболического типа на плоскости.

Гл. IV «Предельные задачи» начинается с рассмотрения задачи Штурма — Лиувилля на отрезке при обычных условиях. Исследование свойств функции Грина дает возможность применить результаты гл. I. Рассмотрен ряд примеров, когда упомянутые обычные условия не выполняются. Далее на основе экстремальной теории устанавливаются асимптотические выражения для собственных значений и собственных функций; обосновывается метод разделения переменных для линейных уравнений 2-го порядка на плоскости. Излагается метод Ритца. Предельные задачи для уравнений эллиптического типа исследуются сперва на основе теории потенциала, причем излагаются некоторые теоремы Ляпунова. Попутно доказана теорема о единственности решения задачи Неймана по Келдышу и Лаврентьеву. Далее излагаются альтернирующий метод и метод верхних функций. Затем исследуется и применяется функция Грина оператора Лапласа. После этого автор переходит к исследованию краевых задач для уравнений $\Delta u+ku=0$; в связи с этим рассматриваются принцип излучения, задача о диффракции электромагнитной волны и асимптотическое выражение собственных функций оператора Лапласа. Рассматривается также система уравнений теории упругости.

Переходя к исследованию краевых задач для уравнения теплопроводности, автор показывает применение потенциалов, функции Грина, преобразования Лапласа, метода прямых, метода Фурье и субпараболических функций. Далее метод Фурье применяется к решению смешанной задачи для волнового уравнения в пространстве.

А. Д. Мышкис

3774 Е. Смешанная задача для гиперболического уравнения. Ладыженская О. А. Предисл. В. И. Смирнова, 280 стр., М., Гостехиздат, 1953, 8 р. 65 к.

До последнего времени смешанная задача для гиперболических уравнений с тремя и более независимыми переменными была изучена гораздо слабее, чем задача Коши. Только недавно (в первую очередь в работах автора) был получен ряд основных результатов, которые и собраны в реферируемой книге; большая часть фактов излагается в развернутом виде впервые.

Рассматривается уравнение

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}(x_0, x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=0}^{n} a_i(x_0, x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x_0, x)u + f(x_0, x) = 0, \qquad (1)$$

где $0 \leqslant x_0 \leqslant l$, $x=(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$, причем краевое условие имеет вид

$$u\big|_{x_0=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x_0}\Big|_{x_0=0} = \psi(x),$$

$$\left(hu + g\frac{\partial u}{\partial N}\right)\Big|_{x\in S} = \chi(x_0, x)$$

(S — граница конечной области Ω, N — конормаль). Предполагается, что $a_{ij} \equiv a_{ji}$, $a_{00} \equiv 1$, $-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \alpha\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$ ($\alpha = \text{const} > 0$).

После введения, содержащего обзор существующих методов решения смешанной задачи и задачи Коши для гиперболических уравнений, в гл. 1 рассматривается ряд вспомогательных предложений. Сначала приведены основные необходимые определения и свойства, связанные с понятиями линейных пространств, обобщенных производных и пространств $W_p^{(k)}$ по С. Л. Соболеву (см. его книгу «Некоторые применения функционального анализа в математической физике», ЛГУ, 1950). Далее рассмотрены пространства D функций, обращающихся в обобщенном смысле в нуль на границе Ω или $Q = [0, l] \times \Omega$. Затем перечисляются основные свойства обобщенных (в смысле Р. Куранта) собственных функций операторов вида

$$L(u) \equiv \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - a(x)u \qquad (2)$$

($a_{ij} \equiv a_{ji}$; $a \geqslant 0$; $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \alpha\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$; $\alpha = \text{const} > 0$).

Приводятся некоторые теоремы о разностных отношениях, которые при определенных предположениях гарантируют сходимость в смысле L_2 или $W_2^{(1)}$ последовательности кусочно-линейных функций, строящихся в методе конечных разностей. В заключение доказаны три леммы о производных на криволинейной поверхности.

Гл. II посвящена методу Фурье в применении к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - Lu - f(x_0, x) = 0 \qquad (3)$$

при граничном условии $u|_s = 0$. Автор рассматривает три понятия решения, причем каждое следующее является обобщением предыдущего. «Классическое решение» удовлетворяет всем поставленным условиям в обычном смысле; «решение почти всюду» удовлетворяет уравнению (3) почти всюду, начальному условию в среднем, а граничному — в силу принадлежности соответствующему функциональному пространству; наконец, для «обобщенного решения» уравнение (3) заменяется интегральным соотношением. Прежде всего доказано, что если коэффициенты a_{ij} и a измеримы и ограничены,

не может быть более одного обобщенного решения. ее доказано, что в дополнительном предположении $\overset{0}{D}(\Omega)$, $\psi \in L_2(\Omega)$, $f \in L_2(Q)$ ряд, полученный по оду Фурье, сходится в $W_2^{(1)}(\Omega)$ равномерно по $[0, l]$ и его сумма представляет собой обобщенное ение. Чтобы перейти к анализу свойств гладкости ения, выводится основная лемма, связывающая не-енствами интегралы некоторых квадратичных форм производных высшего порядка произвольных доста-но гладких функций. На основании этой леммы вы-ятся условия, достаточные для того, чтобы сумма а Фурье была решением почти всюду или класси-ким решением поставленной задачи. Изучается схо-ость k раз продифференцированного ряда Фурье; зано, как полученные результаты переносятся на ничное условие вида $\{\partial u / \partial N + hu\}_S = 0$.

аиболее сильные результаты получены в гл. III, где ешению смешанной задачи для уравнения (1) при ничном условии $u|_S = 0$ применяется аппарат конеч-разностей, существенно развитый по сравнению с , что было известно ранее. Единственность обобщен-о решения доказана, если все функции a_{ij} непре-ны, a_i и a ограничены и измеримы и существуют аниченные обобщенные производные вида $\partial a_{ij} / \partial x_i$, $/ \partial x_0$, $\partial^2 a_{ij} / \partial x_i \partial x_j$, $\partial a_i / \partial x_i$, существование — если $a_{0i} \equiv 0$, функции a_{ij}, $\partial a_{ij} / \partial x_j$, a_i и a непрерывны $\overline{Q}$, $f \in L^2(Q)$, $\varphi \in \overset{0}{D}(\Omega)$, $\psi \in L^2(\Omega)$. При помощи то-же метода сеток изучаются дифференциальные свой-а обобщенного решения, что, в частности, дает воз-жность вывести условия, достаточные для того, чтобы бщенное решение было решением почти всюду или ссическим решением. Имеются некоторые замечания ешении смешанной задачи для неограниченной об-ти. В заключение приведена иная, более сложная ностная схема, которая позволяет охватить и случай $\neq 0$.

гл. IV дано обоснование применения преобразова-Лапласа к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)\, u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - M(u) = f$$

однородных начальных условиях и граничных усло-х вида $u|_S = 0$. Доказательства основаны на иссле-ании решений уравнения $M(v) = \lambda^2 v - \psi(x)$ (λ ком-ексное) при граничном условии $v|_S = 0$; это исследо-ие проводится при помощи метода сеток. Здесь же учены применяемые в гл. II условия гладкости бщенных собственных функций оператора (2). В по-дней гл. V приводятся в основном результаты Кржи-ского и Шаудера (Krzyżański M., Schauder J., Studia th., 1936, **6**, 162—189); при этом добавлены необхо-мые доказательства и пояснения и снижена степень дкости данных задачи. А. Д. Мышкис

75 К. О поведении решений дифференциальных уравнений в частных производных. І. Йон (On be-avior of solutions of partial differential equations. . John F. 124 pp., University of Maryland, 1953), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, 59, № 6, 614 (библ.)

76 К. Дифференциальные уравнения с частными производными в инженерных проблемах. Миллер (Partial differential equations in engineering problems. Miller K. S., 251 pp., New York, Prentice-Hall, 1953, 6.35 doll.), Engng J., 1953, **36**, № 12, 698 (библ.)

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

3777. Некоторые явные соотношения между фазой и рассеивающим потенциалом. Левинсон (Certain explicit relationships between phase shift and scattering potential. Levinson Norman), Phys. Rev., 1953, 89, № 4, 755—757 (англ.)
См. РЖФиз, 1954, 2246.

3778. Изучение нелинейного контура стробоскопическим методом Н. Минорского. Манакорда (Studio di un circuito non lineare col metodo stroboscopico di N. Minorsky. Manacorda Tristano), Boll. Unione mat. ital., 1953, 8, № 3, 281—285 (итал.)

При помощи стробоскопического метода показывается, что в некоторых нелинейных колебательных системах возникают устойчивые автоколебания при параметрическом воздействии.

Рассматривается уравнение колебательного контура, содержащего железный сердечник:

$$C\dot{\Phi} + CRi + \int i\, dt = 0, \qquad (1)$$

Φ — поток магнитной индукции, C — емкость, R — сопротивление,

$$C = C_0(1 + \lambda \cos \Omega t),\ i = A\Phi + B\Phi^3,\ \lambda \ll 1.$$

Уравнение (1) записывается в виде

$$\ddot{\Phi} + \Phi = -\lambda [r\sqrt{AC_0} - \omega_0 \sin \omega_0 t + \cdots]\dot{\Phi} - \lambda [b\Phi^3 - \Phi \cos 2t + \cdots], \qquad (2)$$

где $\omega_0 = \Omega\sqrt{C_0 / A}$, $r\lambda = R$, $b\lambda = B / A$. Уравнению (2) соответствует стробоскопическая система

$$d\rho / d\tau = -\rho [{}^1/_2 r\sqrt{AC_0} + {}^1/_4 \sin 2\gamma],$$
$$d\gamma / d\tau = -{}^3/_8\, b\rho^2 + {}^1/_4 \cos 2\gamma, \qquad (3)$$

Для периодического в первом приближении решения с периодом 2π (правые части уравнений (3) приравниваются к нулю) получаются выражения

$$\bar{\rho}^2 = 2(3b)^{-1}\sqrt{1 - 4r^2 AC_0},$$
$$\operatorname{tg} 2\bar{\gamma} = 2r\sqrt{AC_0} / \sqrt{1 - 4r^2 AC_0}, \qquad (4)$$

которые определяют амплитуду и фазу стационарных колебаний при $r\sqrt{AC_0} < {}^1/_2$. Составляя уравнения в вариациях, автор показывает устойчивость стационарного режима (4) и неустойчивость режима $\rho = 0$, $\gamma = \pi / 2$, $3\pi / 2$.

В заключение замечено, что к уравнению типа (2) сводится также уравнение колебаний маятника единичной массы при наличии вязкого сопротивления:

$$\ddot{\psi} + (k + 2\dot{l} / l)\dot{\psi} + g / l \sin \psi = 0,$$

если $l = l_0(1 + \lambda \cos \Omega t)$, $\psi = \psi_0 \varphi$, $0 < \psi_0 \ll 1$.

Ю. А. Митропольский

3779. О корнях определителя

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & x & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

Окабе (On the roots of the equation... Okabe Jun-ichi), Repts Res. Inst. Appl. Mech., 1953, 2, № 7, 150—154 (англ.)

Рассматриваются собственные колебания системы закрепленных на равных расстояниях на безинерционной

струне материальных точек, вынужденные колебания которых определялись в первой части работы (РЖМат, 1955, 1745). Задача, как обычно, сводится к отысканию корней определителя, указанного в заглавии работы. Автор новым путем приходит к известным результатам Релея (Rayleig, Theory of Sound, 1926, 1, 174).

М. А. Айзерман

3780. Изучение переходных процессов в системах с обратной связью при помощи конформного преобразования и метода корневых характеристик. Е (The study of transients in linear feedback system by conformal mapping and the root-locus method. Yeh Victor C. M.), Trans. ASME, 1954, **76**, № 3, 349—361 (англ.)

Рассматриваются системы автоматического регулирования и следящие системы, процессы в которых описываются линейным дифференциальным уравнением так, что преобразование Лапласа функции $x(t)$, определяющей изменение во времени регулируемой величины (в следящих системах — ошибки слежения), связано с преобразованием Лапласа внешнего воздействия $f(t)$ соотношением $L[x(t)] = W(s)\,L[f(t)]$, где $W(s) = KY(s)/(1+KY(s))$ — так называемая передаточная функция замкнутой системы, K — положительное число (коэффициент усиления разомкнутой системы), а $Y(s)$ — дробно-рациональная функция (так называемая передаточная функция разомкнутой системы), нули и полюсы которой считаются заданными.

В теории регулирования возникает задача: проследить, хотя бы в общих чертах, каким образом изменяется $x(t)$ при изменении K от 0 до ∞ и при неизменных значениях нулей и полюсов $Y(s)$. Задача эта разбивается на две: 1) по заданным нулям и полюсам $Y(s)$ определить в комплексной плоскости кривые, прочерчиваемые аффиксами полюсов функции $W(s)$ при $0 \leqslant K < \infty$ (корневые годографы) и 2) по распределению нулей $Y(s)$ (совпадающих с нулями W) и по протеканию корневых годографов оценить изменение $x(t)$ при изменении K. Автор рассматривает первую из этих задач. Описывается один из возможных приемов построения корневого годографа, основанный на использовании равенств $|Y_{(s)}^{-1}| = K$ и $\arg Y_{(s)}^{-1} = l\pi$ ($l = 1,2,\ldots$), получаемых приравниванием нулю знаменателя в $W(s)$. Приведены примеры корневых годографов для случаев, когда сумма нулей и полюсов меньше пяти, и изучены некоторые асимптотические свойства корневых годографов. На примерах показано, каким образом построение и изучение свойств корневых годографов позволяет проследить влияние на $x(t)$ значений K и значений иных параметров, определяющих расположение в комплексной плоскости нулей и полюсов $Y(s)$.

М. А. Айзерман

3781. Бесконечные матрицы, связанные с дифракцией на отверстии. Магнус (Infinite matrices associated with diffraction by an aperture. Magnus Wilhelm.), Quart. Appl. Math., 1953, **11**, № 1, 77—86 (англ.)

Задача о дифракции плоской акустической волны, нормально падающей в полупространстве $z < 0$ на экран $z = 0$ с круговым отверстием $\rho < a$ (z, ρ, θ — цилиндрические координаты), сводится к отысканию регулярного вне экрана решения $u(z, \rho, \theta) = u(z, \rho)$ уравнения

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

удовлетворяющего граничным условиям: $u = 0$ при $z = \pm 0$, $\rho > a$, $u = iv_0/k^{-1} \sin kz + O(r^{-1})$ при $z \to -\infty$, и условию излучения: $\partial u/\partial r - iku = O(r^{-1})$ при $r \to \infty$, $z > 0$ ($r = \sqrt{z^2+\rho^2}$). Это решение просто выражается через свои значения в отверстии: $\Phi(\rho) = u(0, \rho)$ ($0 \leqslant \rho < a$). $\Phi(\rho)$ можно представить в виде

$$\Phi(\rho) = -{}^1/_2\, a\, C_0 \sum_{m=0}^{\infty} x_m (1 - \rho^2/a^2)^{(m+1)/2},$$

где C_0 — константа, зависящая от a и заданного v_0, неизвестные x_m определяются из бесконечной систем уравнений

$$\sum_{m=0}^{\infty} l_{n,\,m}\, x_m = (n + {}^3/_2)^{-1} \quad (n = 0,1,2,\ldots),$$

при этом $l_{mn} = l_{n,\,m}(\beta)$ — степенные ряды переменн $\beta = ka/2$ с известными численными коэффициента $l_{n,\,m}^{(p)}$ (Levine H., Schwinger J., Phys. Rev., 1948, 7 № 8, 958 — 974). Автор устанавливает ряд нетривиал ных свойств квадратных бесконечных матри $L^{(p)} = \| l_{n,\,m}^{(p)} \|$ ($p = 0, 1, 2, \ldots$) и на основании их и следует решения системы (1), получаемые в виде фо мальных степенных рядов $x_m = \sum_{r=0}^{\infty} x_m^{(r)} \beta^r$.

М. Г. Кре

3782. О диффузии распадающихся частиц в радиал ном электрическом поле. Килсон (On the diff sion of decaying particles in a radial electric fiel Keilson J.), J. Appl. Phys., 1953, **24**, № 1 1397—1400 (англ.)

Исследуется вероятность $\gamma(r_0, a)$ частице, порожденн на расстоянии a от начала координат, достичь погл щающей сферы S радиуса $r_0 < a$ с центром в нача координат при наличии радиально симметрично электрического поля $\varepsilon = \varepsilon_0/r^2$. Если частицы испускаю ся постоянными источниками мощности I_0, расположе ными на расстоянии a от начала координат, то зада сводится к отысканию отношения

$$\gamma(r_0, a) = I_{\text{погл}}/I_0 = r_0 \frac{d\rho}{dr}\Big|_{r_0} / a^2 \frac{d\rho}{dr}\Big|_{a^-}^{a^+},$$

где $\rho(r)$ удовлетворяет уравнению

$$d^2\rho/dr^2 + 2r^{-1}\, d\rho/dr - \mu\varepsilon_0 D^{-1} r^{-2} d\rho/dr - \rho/D\tau = 0$$

при краевых условиях: $\rho(r_0) = 0$; $\rho(r)$ непрерывна п $r = a$; $\rho'(r)$ терпит разрыв при $r = a$; $\rho(r) \to 0$ п $r \to \infty$. Здесь D — коэффициент диффузии, μ — подви ность частицы, τ — время ее жизни, $\rho(r)$ = плотно вероятности. Для $\gamma(r_0, a)$ получается выражение

$$\gamma(r_0 a) = \frac{r_0}{a} \frac{\exp[-\lambda l/2r_0]}{\exp[-\lambda l/2a_0]} \frac{g_{\mathrm{I}}(a/l)}{g_{\mathrm{I}}(r/l)},$$

где $\lambda = \mu\varepsilon_0/Dl$; $l^2 = D\tau$, $g_{\mathrm{I}}(r)$ — то из двух линейно н зависимых решений уравнения $g''(r) = (1 + \lambda^2/4r^4)\, g($ которое ведет себя, как e^{-r} при $r \to \infty$ и как re^{λ} при $r \to 0$. Заменой $g_{\mathrm{I}} = G(r) \exp[\lambda/2r - r]$ задача свод ся к уравнению $G(r) = (2/\lambda)^{1/2} rG(\lambda/2r)$, для решения к торого применяются численные методы. Приведены гр фики $\gamma_\lambda(r_0 a)$ для различных λ. Ю. И. Днестровск

3783. О проблеме излучения для квазилинейных пар болических дифференциальных уравнений в свя с математической моделью турбулентности. Чжуа Фын-гань (抛物型似稳性微分方程的輻射問題和流的數學模型. 莊逢甘), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 193 8, № 4, 316—327 (кит.; резюме англ.)

Рассматривается квазилинейное дифференциальн уравнение параболического типа

$$\partial u/\partial z + u\, \partial u/\partial x = \nu\, \partial^2 u/\partial x^2,$$

которое ранее выводилось в связи с некоторыми зад чами околозвукового течения газа (Liepman H. W Ashkenas H., Cole J. D., Experiments in transonic flo AAF Rept № 5318, Wrigh Field U. S. A., 1947), рассматривалось также как некоторая модель уравн

ний гидродинамики (Burgers I., Advances Appl. Mech., New York, Acad. press, 1948, 1) и изучалось в связи с некоторыми задачами теории фильтрации (Флорин В. А., Изв. АН СССР, отд. техн. н., 1948, № 9, 1389—1402).

В первых разделах исследуются автомодельные решения уравнения (1), которые имеют вид

$$u = \sqrt{\nu} f(\eta)/t, \quad \eta = x/2\sqrt{\nu t}. \tag{2}$$

Для f получается обыкновенное дифференциальное уравнение, которое приводится автором к вырожденному гипергеометрическому уравнению. Выясняется физический смысл констант, входящих в решение обыкновенного уравнения, и исследуется асимптотическое поведение этого решения при больших и малых значениях переменной η, откуда получаются результаты о поведении решений (2) при больших и малых x и t.

Далее при помощи преобразования

$$u = -2\nu f_x/f \tag{3}$$

автор приводит уравнение (1) к линейному уравнению теплопроводности и рассматривает для (1) смешанную задачу с условиями $u(x, 0) = 0$, $u(0, t) = u_0(t)$, которая сводится к задаче излучения для линейного уравнения теплопроводности. Последняя задача обычным образом приводится к некоторому интегральному уравнению, для которого доказывается единственность решения.

В конце рассматривается частный случай $u_0(t) = u_0 = \text{const}$, полученное решение сравнивается с решением соответствующей линейной задачи.

Отметим, что уравнение (1) в последнее время было рассмотрено О. А. Олейник (см. реф. 3768).

Г. И. Баренблатт

3784. **Волны тока без напряжения и напряжения без тока в двух параллельных линиях. Котт** (Ondes de courant sans tension et de tension sans courant sur deux lignes parallèles. Cotte M.), Onde électr., 1954, 34, № 325, 381—383 + резюме 321—322 (франц.)

Рассмотрен частный случай обобщенной системы телеграфных уравнений, соответствующий двум одинаковым взаимодействующим линиям передачи при отсутствии сопротивления проводов и утечки. Для решения этой системы уравнений используется прием, который является частным случаем известного метода расщепления (Коваленков В. И., Автоматика и телемеханика, 1947, 8, № 4, 255—261). Влияние сопротивления проводов учтено весьма приближенно: учтены лишь поправки к некоторым коэффициентам системы, но в уравнения не введены новые члены вида Ri, где R — сопротивление провода, рассчитанное на единицу длины, а i — ток в соответствующем проводе. Для исследования мгновенных значений токов и напряжений применяется преобразование Лапласа.

Н. А. Бразма

3785. **Особенности газа Трикоми. Трикоми** (Stranezze del «Tricomi-gas». Tricomi Francesco G.), Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1954, 16, № 4, 423—426 (итал.)

Как показал ранее референт (Изв. АН СССР, сер. матем., 1945, 9, № 1, 121—143), газодинамическое уравнение С. А. Чаплыгина может быть представлено в виде

$$\eta\, \partial^2\psi/\partial\theta^2 + \partial^2\psi/\partial\eta^2 + b(\eta)\, \partial\psi/\partial\eta = 0,$$

где η — некоторая функция скорости, θ — угол наклона скорости, ψ — функция тока. Впоследствии С. В. Фалькович (Прикл. матем. и механика, 1947, 11, № 2, 226—227) выяснил, как надо изменить зависимость функции η и плотности ρ от скорости, чтобы было $b(\eta) \equiv 0$ и получалось, таким образом, уравнение Эйлера—Трикоми.

Автор повторяет этот результат С. В. Фальковича, не ссылаясь на работы С. А. Чаплыгина, референта и С. В. Фальковича.

Ф. И. Франкль

3786. **Распространение плоской ударной волны в спокойной атмосфере. Мартин** (The propagation of a plane shock into a quiet atmosphere. Martin M. H.), Canad. J. Math., 1953, 5, № 1, 37—39 (англ.)

Задача о распространении ударной волны в невозмущенной атмосфере сводится к решению задачи Коши для уравнения Монжа—Ампера особого типа. Из первых двух уравнений гидродинамики

$$\rho(uu_x + u_t) + p_x = 0, \quad (\rho u)_x + \rho_t = 0,$$

где x — эйлерова координата, t — время, u — скорость, ρ — плотность, p — давление, следует, что выражения

$$d\xi = u\, d\psi + t\, dp, \quad d\psi = \rho\, dx - \rho u\, dt$$

являются полными дифференциалами. Принимая ξ за неизвестную функцию, а p, ψ — за независимые переменные, получаем уравнение

$$\xi_{\psi\psi}\xi_{pp} - \xi_{\psi p}^2 = \tau_p,$$

где $\tau = \tau(p, \psi) = \rho^{-1}$. Если известно распределение энтропии $S = S(\psi)$, то для политропного газа функция $\tau(p, \psi)$ полностью определена. В этом случае имеет место теорема: При заданной функции распределения энтропии $S(\psi)$ определение движения ударной волны в спокойной атмосфере (и движения за фронтом волны) сводится к решению задачи Коши для уравнения Монжа — Ампера:

$$\xi_{\psi\psi}\xi_{pp} - \xi_{\psi p}^2 + n\delta(\psi)\, p^{-n-1} = 0,$$

где $\delta(\psi) = \exp[(S(\psi) - S_0)/c_p]$, $n = 1/\gamma = c_v/c_p$. Начальные условия для функции ξ задаются на кривой $p = p(\psi)$, которая определяется по $\delta(\psi)$.

Н. Н. Яненко

3787. **Вынужденное течение тонкого слоя вязкой жидкости на вращающейся сфере. Роджерс** (The forced flow of a thin layer of viscous fluid on a rotating sphere. Rogers M. H.), Proc. Roy. Soc., 1954, A224, № 1157, 192—208 (англ.)

Рассматривается вызванное разностью температур движение вязкой сжимаемой жидкости около вращающейся вокруг диаметра сферической поверхности. Вводятся сферические координаты (θ — широта, φ — долгота, r — расстояние от центра), движение считается стационарным, не зависящим от φ. Для определения компонент скорости, давления p, плотности ρ и температуры T используются уравнения Навье-Стокса с постоянным кинематическим коэффициентом вязкости, уравнение неразрывности, уравнение состояния $\rho = \rho_c(1 - T\alpha/\rho_c)$, ($\rho = \rho_c$ при $T = 0$), и уравнение теплопередачи

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\theta \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial T}{\partial\theta}\right) = 0.$$

Рассматривается основное равномерное вращение вокруг оси с заданной угловой скоростью и постоянной температурой и возмущенное движение. Автор имеет в виду движение атмосферы, поэтому он пренебрегает квадратом угловой скорости основного движения (вращения Земли) и нелинейными членами возмущенного движения. Уравнения Навье-Стокса тогда линеаризируются. Граничные условия: на поверхности Земли ($r = a$) все три компоненты u, v, w возмущенной скорости обращаются в нуль, а $\partial T/\partial r = (H\theta)$; на свободной поверхности ($r = a + h$) $w = 0$, $\partial w/\partial r - v/r = 0$, $\partial v/r\partial\theta + \partial u/\partial r - u/r = 0$, $\partial T/\partial r = 0$.

Уравнения переписываются в безразмерных переменных и компоненты скорости разлагаются в ряды по малому параметру $f = h/a$:

$$u = u_{-1}/f + u_0 + u_1 f + \ldots, \quad v = v_{-1}/f + v_0 + v_1 f + \ldots,$$
$$w = w_0 + w_1 f + \ldots.$$

Если радиус Земли считать равным 6000 *км*, а высоту атмосферы 20 *км*, то $f = 1/300$, и из вычислений сле-

дует малость u_0, v_0. В уравнениях остаются линейные члены, содержащие u_{-1}, v_{-1}, w_0, после чего они решаются в квадратурах. Для температуры также берется разложение в ряд по степеням f, коэффициенты которого линейно зависят от полиномов Лежандра $P_n(\cos\theta)$. Исследуя полученные решения, автор приходит к выводу, что линеаризированные уравнения недостаточны для полного описания перемещения атмосферных масс, поэтому в дальнейшем он возвращается к нелинейным уравнениям Навье-Стокса. Компоненты скорости разлагаются в ряды по положительным степеням малого параметра ε ($\varepsilon = 0{,}3$ для Земли) и определяются асимптотические значения первых трех членов рядов при больших $\gamma = \sqrt{R\cos\theta}$, где R — число Рейнольдса. Составлены таблицы и построены графики изменений компонентов скорости. В результате анализа полученного решения делаются заключения относительно некоторых закономерностей движения атмосферы, имеющих значение в динамической метеорологии. Д. Е. Долидзе

3788. Об асимптотическом решении уравнений ламинарного пограничного слоя для пластины. Воронин В. И., Тр. Воронежск. ун-та, 1954, 33, 63—69

Из уравнений стационарного пограничного слоя для пластины, взятых в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial\psi}\left(u\frac{\partial u}{\partial\psi}\right),\quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{P_r}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(u\frac{\partial T}{\partial\psi}\right) + (k-1)M^2 u\left(\frac{\partial u}{\partial\psi}\right)^2,$$

ищутся скорость обтекания пластины $u(x, \psi)$ и температура $T(x, \psi)$ как функции расстояния x вдоль пластины и функции тока ψ. В выражении $u(x, \psi) = C(x)\sqrt{\psi} + z(x, \psi)/\sqrt{\psi}$ выделяется основной член $C(x)\sqrt{\psi}$ и задача определения функций $z(x, \psi)$ и $T(x, \psi)$ приводится к неоднородным уравнениям теплопроводности с переменными коэффициентами:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\psi^2} = \frac{1}{C(x)\sqrt{\psi}}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{C'(x)}{C(x)}\sqrt{\psi},$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{C}{P_r}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\sqrt{\psi}\frac{\partial T}{\partial\psi}\right) + \frac{(k-1)M^2C^2}{4\sqrt{\psi}}.$$

Решения последних представляются формально при помощи рядов по функциям Бесселя. Для u получается асимптотическое решение при больших x: $u = C\sqrt{\psi}$ ($C = \text{const}$). Сходимость ряда не исследуется, но предполагается стремление к нулю при $x \to \infty$ всех коэффициентов разложения.

Воспользовавшись этим асимптотическим решением, автор далее исследует температуру, при условии постоянства ее вдоль пластины, в двух частных случаях: 1) теплопередача от газа к пластине отсутствует, 2) теплопередача может быть отличной от нуля. Д. Е. Долидзе

3789. Новые интегральные уравнения анизотропной теории упругости и их применение для решения граничных задач. Купрадзе В. Д., Башелейшвили М. О., Сообщ. АН ГрузССР, 1954, 15, № 7, 415—422

В предыдущей статье (РЖМат, 1955, 1773) авторы построили фундаментальные решения уравнений плоско-напряженного состояния анизотропной среды. При их помощи строятся четыре типа векторных потенциалов, названных авторами соответственно потенциалами простого или двойного слоя первого или второго рода. Они удовлетворяют уравнениям плоско-напряженного состояния анизотропной среды и некоторым предельным равенствам. Эти потенциалы используются для сведения основных задач плоской теории упругост к системам интегральных уравнений, которые могу быть, в зависимости от выбора потенциала, фредгол мовскими или сингулярными; в последнем случа доказывается, что индекс системы равен нулю, так чт на нее распространяется обычная теория Фредгольм Авторами рассмотрен случай односвязной области ограниченной кривой Ляпунова. Исследование полу ченных уравнений приводит к некоторым вывода относительно разрешимости основных задач (эти вы воды не новы) и о представимости решения тем ил иным потенциалом. Так, доказывается, что решени внутренней краевой задачи при заданных на грани смещениях единственным образом представляется виде потенциала двойного слоя первого рода. С. Г. Михли

3790. Среда Грина. Свекло В. А., Уч. за Карело-Финск. ун-та, 1954, 3, № 4, 52—62

Рассматривается анизотропная упругая среда с упру гим потенциалом

$$2w = A(e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + L(e_{yz}^2 - 4e_{yy}e_{zz}) + M(e_{zx}^2 - 4e_{zz}e_{xx}) + N(e_{xy}^2 - 4e_{xx}e_{yy}),$$

где A, L, M, N — упругие постоянные, e_{xx}, e_{yz}, ... составляющие тензора деформации. В такой среде п перечные волны, как и в изотропном случае, создаю смещения, параллельные фронту волны (Green, Trans Philos. Soc., Cambridge, 1839, № 7). Ставится вопрос дифференциальных уравнениях для скалярного и вен торного потенциалов вектора упругого смещения. Вы водится система уравнений, определяющих компоненты вектора смещения, который разбивается на потенциаль ную и вихревую части, что приводит к уравнениям

$$\Delta\Phi = \rho A^{-1}\partial^2\Phi/\partial t^2,\ \Delta\Psi - \operatorname{grad}\operatorname{div}\Psi = B\partial^2\Psi/\partial t^2,$$

где B — диагональная матрица с элементами ρ/L, ρ/M ρ/N. Отмечается, что уравнения (2) совпадают с ура нениями кристаллооптики. Для плоских задач уравнени (2) не отличаются от уравнений колебаний изотропног тела, совпадают в этом случае также и граничные усло вия. Аналогичное совпадение имеет место и для ли нейно поляризованных волн, если рассматривать ура нение, определяющее смещение в направлении распро странения волны, и ввести при помощи преобразовани подобия новые координаты в перпендикулярной плос кости. И. С. Аржаны

3791. Об экранирующем действии тонкого упругог слоя. Бабич В., Алексеев А., Докл АН СССР, 1953, 91, № 4, 763—765

Решение задачи теории упругости для среды, сост ящей из двух полупространств $z > 0$ и $z < -h$ одина кового свойства и заключенного между ними однород ного изотропного упругого слоя $-h \leqslant z \leqslant 0$, упруги свойства которого отличны от свойств внешней среды Предполагается, что вся среда находится в покое пр $t < 0$ и подвергается резкому осесимметричному воз действию в момент $t = 0$ в точке $z = z_0 > 0$. На границ ных поверхностях выполняются условия непрерывност смещений и напряжений. Задача решается методом не полного разделения переменных (Петрашень Г. И. Марчук Г. И., Огурцов К. И., Уч. зап. ЛГУ, сер. ма тем., 1950, № 21, 71—118). Полученные формулы по звоняют дать количественный и качественный анали явления. И. Н. Карцивадз

3792. Об одной задаче электродинамики. Аржа ных И. С., Докл. АН УзССР, 1954, № 6, 3— (резюме узб.)

Для электромагнитного поля в пространстве, сво бодном от зарядов, доказывается теорема единствен ности: Поле в точке p однозначно определяется зада

ием на поверхности S, заключенной внутри сферы радиуса ct, нормальных составляющих поля в нальный момент $t = 0$ и касательных составляющих ля всех моментов от 0 до t. Доказательство проводится рямым построением решения. В системе координат иний кривизны определяются нормальные компоненты и нормальные производные полей на поверхности для всех моментов времени от 0 до t, затем применяется формула Кирхгофа. Ю. Н. Днестровский

3793. Новое доказательство формулы волны — пилота в теории двойного решения. Де-Бройль (Une nouvelle démonstration de la formule du guidage en théorie de la double solution. Broglie Louis de), C. r. Acad. sci., 1954, 239, № 13, 737—739 (франц.)

По предположению автора, сделанному в 1927 г., каждому регулярному решению волновых уравнений вантовой механики $v = ae^{2\pi i\varphi/h}$ должно соответствовать ингулярное решение u с той же фазой φ и амплитуой f с точечной особенностью: $u = fe^{2\pi i\varphi/h}$. Для слуая уравнения Клейна — Гордона в присутствии внешего электромагнитного поля скорость движения особой очки амплитуды f равна

$$\mathbf{v} = (A, B, C) = -c^2 (\operatorname{grad}\varphi + \mathbf{A}\varepsilon/c) / (\partial\varphi/\partial t - \varepsilon V),$$

де ε — заряд частицы, $\mathbf{A}$ и V — векторный и скалярый потенциалы электромагнитного поля. При подстановке v и u в уравнение Клейна — Гордона для амплитуд a и f получается уравнение первого порядка

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\operatorname{grad} + D\right)\begin{Bmatrix} a \\ f \end{Bmatrix} = 0, \qquad (1)$$

где $D = c^2/2\cdot(\partial\varphi/\partial t - \varepsilon V)^{-1}\Box\varphi$. Его общее решение представляется в форме

$$\begin{Bmatrix} a \\ f \end{Bmatrix} = \Phi(\lambda, \mu, \nu)\exp\left(-\int^t F(\lambda, \mu, \nu, t)\,dt\right), \qquad (2)$$

где Φ — произвольная функция, λ, μ, ν — первые интегралы системы $dt = dx/A = dy/B = dz/C$, т. е. характеристические поверхности уравнения (1). $F(\lambda, \mu, \nu, t) = D(x, y, z, t)$ вдоль характеристик. Так как a — регулярная функция, то первый множитель в (2) регулярен. Отсюда следует, что функция f может иметь особенность в точке $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0)$, т. е. только вдоль всей характеристики в пространственно-временном континууме. Ю. Н. Днестровский

3794 Д. О некоторых резонансных явлениях в системах с распределенными параметрами. Мосеенков Б. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Киевск. ун-т, Киев, 1954

См. также: 3685, 3714, 3715, 3735, 3796, 3797, 3803, 3841, 3852, 3982, 3992, 3994, 3995, 4007 Д

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3795. Об одном классе интегральных уравнений. Фенье (Über eine Klasse von Integralgleichungen. Fenyö I.), Publs mathematicae, 1952, **2**, № 3-4, 248—251 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.)

Пусть $K(P, P')$ — функция, интегрируемая с квадратом по поверхности F шара с центром в начале координат и радиусом 1; P, $P' \in F$. Пусть $K(P, P')$ зависит только от расстояния между точками P и P' т. е. только от угла γ между радиусами OP и OP'): $K(P, P') = f(\cos\gamma) = f(\xi)$.

На F рассмотрим ортонормированную систему сферических функций, и в этой системе обозначим через

$$S_{n1}(\theta, \varphi),\ S_{n2}(\theta, \varphi),\ \ldots,\ S_{n,\,2n+1}(\theta, \varphi) \qquad (1)$$

ферические функции n-го порядка.

Теорема. Собственными значениями λ_n ядра $K(P, P')$ являются числа $(2n+1)/\left[4\pi\int_{-1}^{+1} f(\xi)\,P_n(\xi)\,d(\xi)\right]$, где $P_n(\xi)$ — n-й полином Лежандра ($n = 0, 1, 2, \ldots$), обственными функциями, соответствующими λ_n, являются $2n+1$ сферических функций n-го порядка (1).

Из этой теоремы следует, что ядро K тогда и только огда замкнуто, когда все коэффициенты c_n отличны от нуля. Если все $c_n > 0$, то ядро — положительно определенное. Если, кроме того, $f(\xi)$ — непрерывная функция, то справедлива теорема Мерсера. Ю. К. Ландо

3796. О гармонических матрицах. Уолл (Concerning harmonic matrices. Wall H. S.), Arch. Math., 1954, 5, № 1—3, 160—167 (англ.)

Рассматриваются два класса квадратных матриц n-го порядка, элементами которых являются комплексно-начные функции одного и двух действительных переменных, изменяющихся на всей прямой: класс Φ_n матриц $F(x)$, элементы которых непрерывны и имеют ограниченное изменение в каждом конечном интервале, при этом $F(0) = 0$ и класс H_n матриц $M(x, y)$, именуемых гармоническими, которые удовлетворяют условиям:

$$M(x, y)\,M(y, z) \equiv M(x, z), \qquad (1)$$

$M(x, x)$ равно единичной матрице I, причем их элементы $M_{ij}(x, y)$ при каждом y непрерывны и имеют ограниченное изменение по x, а при каждом x непрерывны по y.

Основной результат состоит в том, что соотношение

$$M(x, y) = I + \int_x^y dF(s)\,M(s, y)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между этими классами. Доказательство в одну сторону (построение F по M) получается простыми алгебраическими преобразованиями соотношения (1), а в другую — методом последовательных приближений. Даны приложения к простым видам систем дифференциальных и интегральных уравнений и обобщение на матрицы бесконечного порядка. М. К. Фаге

3797. Решение одного однородного интегрального уравнения. Станкович (Решење једне хомогене интегралне једначине. Станковић Богољуб), Зб. радова. Српска АН, 1953, **35**, № 3, 95—106 (серб.; резюме франц.)

Исследуется и решается однородное интегральное уравнение

$$f(x) - \frac{\lambda}{\sqrt{\pi x}}\int_0^\infty e^{-t^2/4x} f(t)\,dt = 0. \qquad (1)$$

Если ограничиться рассмотрением определенного класса «регулярных» функций, то для каждого действительного λ существует единственное решение уравнения (1). Это решение имеет следующую физическую интерпретацию: формулой

$$\theta(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-(x-u)^2/4t} f(u)\,du,$$

где $f(u)$ — решение уравнения (1), дается решение уравнения теплопроводности $\partial\theta/\partial t = \partial^2\theta/\partial x^2$ для бесконечного линейного проводника при следующих начальных и граничных условиях

$$\theta(x, 0) = f(x) \text{ при } x \geqslant 0; \quad = 0 \text{ при } x < 0; \quad \theta(0, t) = \lambda f(t)/2.$$

И. П. Гохберг

3798. Условия полной непрерывности оператора П. С. Урысона, действующего в пространстве L^p. **Красносельский М. А., Ладыженский Л. А.,** Тр. Моск. матем. о-ва, 1954, **3**, 307—320

Изучается нелинейный интегральный оператор П. С. Урысона

$$\mathscr{K}\varphi(x) = \int_G K(x, y, \varphi(y))\, dy,$$

где G — ограниченная измеримая область конечномерного евклидова пространства, функция $K(x, y, u)$ определена и измерима по совокупности аргументов в области $x,\ y \in G,\ -\infty < u < \infty$ и, сверх того, непрерывна по u для почти всех $(x, y) \in G \times G$. Ищутся условия, при которых $\mathscr{K}$ есть вполне непрерывный оператор, действующий из L^{p_1} в $L^{p_2}(p_1,\ p_2 > 1)$.

Основной является теорема 1, которая дает следующие достаточные условия:

1) для любой ограниченной измеримой функции $\psi(x, y)$

$$\iint_{G\times G} |K(x, y, \psi(x, y))|^{p_2} dx\, dy < +\infty;$$

2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что коль скоро $\operatorname{mes} E < \delta$ $(E \subset G)$, то

$$\left\{\int_G \left[\int_E |K(x, y, \varphi(y))|\, dy\right]^{p_2} dx\right\}^{1/p_2} < \varepsilon$$

для всех функций $\varphi(y)$ из единичного шара пространства L^{p_1}.

Условия, обеспечивающие справедливость 1) — 2) и, следовательно, полную непрерывность оператора $\mathscr{K}$, приводятся в теоремах 2, 3, 4. Для практических применений наиболее удобна теорема 4: оператор K вполне непрерывен если выполнены условия 1) и

3) $|K(x, y, u)| \leqslant R(x, y) f(y, u)$,

где $f(y, u)$ непрерывна по u почти при всех y и $f(y, \varphi(y)) \in L^{p_3}(p_3 > 1)$ при всех $\varphi(y) \in L^{p_1}$, а $R(x, y)$ суммируема в $G \times G$ в r-й степени $(r = \max[p_2, p_3/(p_3-1)])$.

М. К. Гавурин

3799 Д. Линейные интегральные уравнения с двумя параметрами (обобщенные линейные интегральные уравнения). **Лихтарников Л. М.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Иркутский ун-т, Иркутск, 1954

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

3800. Метод расчета входного воздействия передающей системы. **Лос** (Způsob výpočtu vstupní veličiny přenášecího systému. Loos Horst Rudolf), Slaboproudý obzor, 1954, 15, № 4, 161—164 (чеш.; резюме русс., нем., англ., франц.)

Статья содержит дополнения к работе, опубликованной ранее под тем же названием (РЖМат, 1951, 311). Рассматриваются примеры использования интегрального уравнения Вольтерра для определения внешнего воздействия на линейную систему по заданной реакции системы на это воздействие и по заданной реакции системы на воздействие типа импульсной функции Дирака.

М. А. Айзерман

3801. Обтекание двух проницаемых профилей, являющихся зеркальным отображением друг друга относительно некоторой плоскости. **Гусейн-заде М. А.,** Вестн. Моск. ун-та, 1954, № 8, 45—49

Рассматривается задача обтекания системы двух проницаемых профилей длины l, симметрично отстоящих друг от друга на расстоянии h.

Задача сводится к интегральному уравнению

$$A\gamma(x) + \frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\gamma(\xi)}{\xi - x}\, d\xi = F(x) + \frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\gamma(\xi)(\xi - x)}{(\xi - x)^2 + h^2}\, d\xi, \quad (1)$$

где $\gamma(x)$ обозначает искомую интенсивность вихревого слоя, имитирующего отдельный профиль. Постоянная A и функция $F(x)$ заданы по условиям обтекания и проницаемости профиля.

Уравнение (1) предлагается решать при помощи аппроксимирующей функции

$$\gamma(x) = (c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n)[x/(l - x)]^m \quad (0 \leqslant m \leqslant 1/2) \quad (2)$$

Коэффициенты c_i в (2) определяются из системы алгебраических линейных уравнений, получаемых при подстановке функции (2) в уравнение (1).

В. П. Пилатовский

См. также: 3713, 3720, 3749, 3772, 3773 К, 3781, 3789, 3839, 3985

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

3802. Разрывные решения вариационных задач с ограниченным наклоном. **Фёллингер** (Diskontinuierliche Lösungen von Variationsproblemen mit Gefällebeschränkung. Föllinger Otto), Math. Ann., 1953, 126, № 5, 466—480 (нем.)

Пусть на плоскости xy заданы область G_2 и точки $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_1, P_2 \in G_2$, $x_1 < x_2$; определим в G_2 функции $g(x, y)$ и $G(x, y)$, принадлежащие классу C^2, причем $g(x, y) < G(x, y)$. Через G_3 обозначим множество точек (x, y, y') с $(x, y) \in G_2$ и $g(x, y) \leqslant y' \leqslant G(x, y)$. Пусть $C: y = \varphi(x)$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ — кусочногладкая кривая с концами P_1, P_2, которой в пространстве x, y, y' соответствует кривая $\dot{C}: y = \varphi(x)$, $y' = \varphi'(x)$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Кривая C называется допустимой, если $\dot{C} \subset G_3$.

Рассмотрим вариационную задачу

$$I(C) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx = \min, \quad 1)$$

где $F(x, y, y')$ принадлежит классу C^3 в области $\overline{G}_3 \supset G_3$. Пусть допустимая кривая C_0 задачи (1) состоит из двух гладких дуг: $E_0: y = \varphi_0(x)$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_0$ и $\overline{E}_0: y = \overline{\varphi}_0(x)$, $x_0 \leqslant x \leqslant x_2$, соединяющихся в угловой точке $P_0 = (x_0, y_0)$, причем $p_0 \neq \overline{p}_0$, где $p_0 = \varphi_0'(x_0)$, $\overline{p}_0 = \overline{\varphi}_0'(x_0)$. В работе находятся необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять кривая C_0 для того, чтобы она реализовала минимум задачи (1) в следующих случаях: 1) $\dot{E}_0$ лежит внутри, а $\dot{\overline{E}}_0$ — на верхней границе G_3; 2) $\dot{E}_0$ лежит на нижней границе, а $\dot{\overline{E}}_0$ — на верхней границе G_3.

Для случая 1) устанавливается, что E_0 удовлетворяет всем известным необходимым условиям минимума (Эйлера, Лежандра, Якоби, Вейерштрасса). Построив некоторое специальное семейство допустимых (ломаных) кривых, содержащее в себе C_0, автор устанавливает дополнительные необходимые условия (из-за громозд-

ти мы их не выписываем. *Прим. реф.*) для C_0. Да-
строится поле, содержащее в себе C_0, причем в него
дят не только ломаные экстремали задачи (1), но и
аные, состоящие из экстремалей вида E_0 и решений
знения $y' = G(x, y)$.
ля задачи (1) указывается аналог функции Вейер-
асса (значительно отличающийся от обычной функ-
Вейерштрасса) и доказывается необходимое усло-
Вейерштрасса.
оказывается, что некоторое усиление полученных
бходимых условий приводит к достаточным условиям
того, чтобы C_0 реализовала минимум задачи (1).
случае 2) поле, содержащее в себе C_0, строится
ломаных кривых, состоящих из решений уравнений
$= g(x, y)$ и $y' = G(x, y)$. Получены аналог функции
ерштрасса и необходимые и достаточные условия
имума для C_0.
Задача (1) в частном случае, когда $g(x, y)$ и $G(x, y)$
остоянные, изучалась ранее (Flodin B., Acta Soc.
nt. fennica, 1945, **A3**, № 10). М. К. Керимов

3. Динамическое программирование и новый формализм в вариационном исчислении. Б е л л м а н (Dynamic programming and a new formalism in the calculus of variations. B e l l m a n R i c h a r d), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, **40**, № 4, 231—235 (англ.)

Предлагается новый подход к некоторым задачам
ариационного исчисления. По мнению автора, этот под-
особенно приспособлен для трактовки вариацион-
задач, возникающих в теории стохастических про-
сов и в ряде вопросов техники. Метод иллюстри-
тся на двух классических задачах.

Задача о максимуме $\int_0^t F(x, z)\,du$ при условиях
$du = G(x, z)$, $x(0) = c$. В отличие от классического
хода, при котором c и t фиксируются, автор рас-
тривает $\max \int_0^t F(x, z)\,du$ как функцию $f(c, t)$ и на-
ит функциальное уравнение для определения этой
кции:

$$f(c, s+t) = \max\left\{\int_0^s F(x, z)\,du + f(x(s), t)\right\};$$

сь max берется по всем $z(u)$, заданным на сегменте
s], а $x(s)$ — значение при $u = s$ решения задачи 1
сегмента $[0, s]$. При $s \to 0$ отсюда получается со-
ошение

$$f_t = \max_w [F(c, w) + G(c, w) f_c] \quad (w = z(0)).$$

ксимум находится из условия $F_w + G_w f_c = 0$, вслед-
ие которого

$$f_t = (FG_w - GF_w) / G_w = K(c, w),$$

$$f_c = -F_w / G_w = L(c, w),\ K_c + K_w w_c = L_w w_t.$$

леднее квазилинейное уравнение и служит для
еделения $w(c, t)$; в случае $G(x, z) \equiv z$ соответству-
ие характеристические уравнения эквивалентны
чному уравнению Эйлера. Начальная функция $w(c, 0)$
учается из уравнения $F_w(c, w) = 0$. По $w(c, t)$
ко найти решение задачи.

. Задача о собственных значениях. Рассматривается
$\int_a^{a+t} x'^2\,du$ при условиях а) $x(a) = x(a+t) = 0$,
$\int_a^{a+t} \varphi(u) x^2\,du = 1$.

двиг левого конца из a в $a+s$ сопровождается за-
ой функции $x(u)$ на $y(u) = x(u) - sx'(a)(a+s+$
$-u)/t$, удовлетворяющую с точностью до малых
рого порядка относительно s условиям $y(a+s) =$
$(a+s+t) = 0$. Так как вид условия б) при этой
ене не воспроизводится, рассматривается более общая
ача $\int_a^{a+t} x'^2\,du = \min$ при условиях а) и

) $\int_c^{a+t} \varphi(u) x^2\,du + k\int_a^{a+t} \varphi(u)(a+t-u) x\,du = 1$,

Минимум в этой задаче обозначается через $f(a, k, t)$;
для f получается функциональное уравнение, а из него—
нелинейное уравнение в частных производных. Ввиду
громоздкости, эти уравнения здесь не приводятся. Из-
ложение носит эвристический характер. А. И. Фет

3804. Вариационные принципы в динамике. П а р с (Variation principles in dynamics. P a r s L. A.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1954, **7**, № 3, 338—351 (англ.)

Ставится вопрос о возможности обобщения вариационного принципа Гамильтона — Остроградского на неголономные системы с линейными связями. Считая, что данный вопрос принципиально решен Гёльдером (Hölder O., Göttingen. Nachr., 1896, 122), автор в дальнейшем на основании принципа Даламбера в форме Лагранжа устанавливает равенство

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\delta L + \left(\sum_{r=1}^n \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right)\frac{d}{dt}\,\delta t - \frac{\partial L}{\partial t}\,\delta t\right\} dt = 0, \quad (1)$$

выражающее, по мнению автора, принцип Гёльдера (в равенстве (1) оператор δ представляет полную, т. е. неизохронную, вариацию). Затем рассмотрен случай однородных неголономных связей при условии, что кинетический потенциал не зависит явно от времени. Если зафиксировать постоянную h интеграла энергии, то вариационный принцип автора выражается равенством

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (L + h)\,dt = 0 \quad (2)$$

(оператор δ имеет тот же смысл). Примеров использования равенств (1) и (2) для вывода уравнений движения в статье не содержится. Однако вначале автор приводит два классических примера, когда невозможно непосредственное применение принципа Гамильтона—Остроградского.

П р и м е ч а н и е р е ф е р е н т о в. Автору, по-видимому, неизвестна работа Г. К. Суслова, подробно изложенная в его книге (Суслов Г. К., Теоретическая механика, М., 1944). Вызывает возражения вывод равенства (1) в связи с тем, что в статье левая часть равенства (1) приведена к виду

$$-\int_{t_1}^{t_2} \sum_1^n \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_r}\right\} \delta q_r dt,$$

а затем использован принцип Даламбера—Лангранжа. Однако вариации координат, в силу связей, в равенстве Даламбера — Лагранжа существенно отличаются от вариаций δq_r автора. И. С. Аржаных, А. К. Никитин

3805. О главных колебаниях с конечными амплитудами. II. П ё ш л ь (Über Hauptschwingungen mit endlichen Schwingweiten. II. Mitt. P ö s c h l T h.), Ingr-Arch., 1953, **21**, № 5—6, 396—398 (нем.)

Автор в предыдущей статье (Ingr-Arch., 1952, 20, 189—194) вывел дифференциальное уравнение кривых, определяющих главные направления конечных колебаний механической системы с кинетическим потенциалом

$$L = (a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2)/2 - V(x, y).$$

Уравнение этих «граничных кривых» имеет вид

$$dy/dx = -(bV_x - cV_y)/(aV_x - bV_y).$$

В реферируемой работе показывается, что граничные кривые являются трансверсалями вариационной задачи об экстремальности интеграла действия Якоби

$$\int_{(0,\,0)}^{(x,\,y)} \sqrt{2(h-V)(cy'^2 + 2by' + a)}\,dx$$

при условии, что точка (x, y) лежит на кривой $h - V = 0$, где кинетическая энергия равна нулю. Дана иллюстрация на примере двойного маятника.

И. С. Аржаных

См. также: 3773 К, 3842, 3962

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

3806. Об интегрировании функций вида $e^{ax}f(x)$. Хакала (On integration of functions of the form $e^{ax}f(x)$. Hakala Reino W.), Math. Mag., 1953, 27, № 2, 69—74 (англ.)

Приводится вывод известной символической формулы для вычисления интегралов вида $\int e^{ax}f(x)\,dx$, которая затем прилагается к ряду примеров. Метод носит формальный характер. Б. П. Демидович

3807. Применения дельта-функции Дирака к вычислению некоторых интегралов. Спигел (Applications of the Dirac delta function to the evaluation of certain integrals. Spiegel Murray R.), J. Appl. Phys., 1954, 25, № 10, 1302—1306 (англ.)

Предлагается способ вычисления некоторых интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x)/P(x)]\cdot dx, \qquad (1)$$

где $P(x)$ — многочлен, а в качестве $\varphi(x)$ можно взять $\sin x$, $\cos x$, $x\sin x$ и т. п. Обычно такие интегралы определяются с помощью теории вычетов.

Сущность способа выясняется при рассмотрении приводимых автором примеров. В интеграл (1) вводится параметр λ и с помощью формул

$$\int_0^{\infty}\cos\lambda x\,dx=\pi\delta(\lambda), \qquad \int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x}dx=2\pi\delta(\lambda),$$

где $\delta(\lambda)$ — импульсная функция, выводится дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами для некоторой функции $F(\lambda)$, решая которое, автор находит интеграл вида (1).

Отсутствует строгое обоснование производимых операций. Ю. И. Черский

3808. Интегрирование по частям интегралов, суммируемых по Чезаро. Боруэйн (Integration by parts of Cesàro summable integrals. Borwein D.), J. London Math. Soc., 1954, 29, № 3, 276—292 (англ.)

Обозначения: k — целое неотрицательное число; $\varphi(x)\,(1\leqslant x<\infty)$ — функция с абсолютно непрерывной k-й производной; Ω_r^k, $r=1,2$ — классы функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих при $x\geqslant 1$ соответственно условиям (1) и (2):

$$0<|\varphi(x)|<m,\ \int_x^{\infty}t^k|\varphi^{(k+1)}(t)|\,dt<M|\varphi(x)|, \qquad (1)$$

$$|\varphi(x)|>m>0,\ \int_1^{x}|\varphi'(t)|\,dt<M|\varphi(x)|,$$

$$\int_1^{x}t^k|\varphi^{(k+1)}(t)|\,dt<M|\varphi|(x)| \qquad (2)$$

(m, M — некоторые константы); $f(x)$ — функция, определенная в интервале $(1,\infty)$ и суммируемая в каждом конечном интервале;

$$f_0(x)=f(x),\ f_\mu(x)=[1/\Gamma(\mu)]\int_1^{x}(x-t)^{\mu-1}f(t)\,dt$$

$$(x\geqslant 1,\ \mu>0).$$

Теорема 1. Пусть $k\geqslant\lambda\geqslant 1$ и

$$\int_1^{\infty}f(t)\varphi(t)\,dt=A \quad (C,\lambda). \qquad (3)$$

1) Если $\varphi\in\Omega_1^k$ и $\varphi(x)\to 0$ $(x\to\infty)$, то для любого s

$$\int_1^{\infty}\{f_1(t)-s\}\varphi'(t)\,dt=s\varphi(1)-A \quad (C,\lambda-1). \qquad (4)$$

2) Если $\varphi\in\Omega_2^k$ и $|\varphi(x)|\to\infty$ $(x\to\infty)$, то (4) ве
ведливо лишь для $s=s_0$, где $s_0=\int_1^{\infty}f(t)\,dt$ $(C,\lambda$

3) Если $\varphi\in\Omega_1^k\cap\Omega_2^k$, то интеграл (4) для любо
суммируем $(C,\lambda-1)$ к $(s_0-s)\varphi(\infty)+s\varphi(1)-A(\varphi$
в этом случае существует).

Теорема 2. Пусть $\varphi(x)$ такова, что из (3) вс
следует $(C,\lambda-1)$-ограниченность интеграла (4) при
котором s и $\lambda=1,2,\ldots,k$.

1) Если $0<\varphi(x)<m$ $(x\geqslant 1)$, то $\varphi\in\Omega_1^k$.

2) Если $\varphi(x)>m>0$ $(x\geqslant 1)$, то $\varphi\in\Omega_2^k$.

Б. И. Коренбл

3809. Новейшие применения выпуклых функц
Грин (Recent applications of convex functi
Green J. W.), Amer. Math. Monthly, 1954,
№ 7, part I, 449—454 (англ.)

Обзорная статья по некоторым вопросам теории
пуклых функций, развитым после 1946 г. (Автор
лается на статью Бекенбаха (Beckenbach E. F., B
Amer. Math. Soc., 1948, 54, 439—460), охватываю
материал до 1946 г.). Приводятся некоторые обобще
выпуклых функций, приложения выпуклых фун
к геометрии, теории функций и программиров
В конце статьи автор приводит известное определе
сопряженных выпуклых функций в n-мерном прост
стве с помощью полюсов — поляр относительно квадр
$2z=x_1^2+\cdots+x_n^2$ — и указывает на приложение э
понятия и задачам программирования и к неравенст
Доказательств статья не содержит. Ф. В. Широ

3810. Представление выпуклых функций инте
лом Стилтьеса. Темпл (Stieltjes integral re
sentation of convex functions. Temple W.
Duke Math. J., 1954, 21, № 3, 527—531 (англ.)

Функция $f(x)$ предполагается выпуклой на интерв
содержащем сегмент $[0,1]$ внутри себя. Доказыва
существование такой неубывающей функции $\mu(x)$,

$$f(x)=l(x)-\int_0^1 G(x,t)\,d\mu(t),$$

где $l(x)$ — линейная функция, удовлетворяющая усл
ям: $l(0)=f(0)$, $l(1)=f(1)$, а $G(x,t)=t(1-x)$ при $0\leqslant$
$\leqslant x<1$ и $=x(1-t)$ при $0<x\leqslant t\leqslant 1$. Доказат
ство основывается на свойствах полиномов Бернште
Аналогичный результат устанавливается для вы
лых функций порядка $k>2$, т. е. для функций, о
дающих тем свойством, что $\Delta_\delta^k f(x)\geqslant 0$, где $\Delta_\delta^k f(x$
разность порядка k с шагом δ. Ф. И. Харшил

3811. О неравенствах типа Турана. Сковг
(On inequalities of the Turán type. Skovgaard
Math. scand., 1954, 2, № 1, 65—73 (англ.)

В 1948 г. Cerë отметил (Szegö G., Bull. Amer. M
Soc., 1948, 54, 401—405), что Тураном было установ
неравенство

$$\Delta_n(x)\equiv u_n^2(x)-u_{n-1}(x)\,u_{n+1}(x)\geqslant 0$$

для полиномов Лежандра, т. е. при $u_n(x)=P_n(x$
основном промежутке $-1\leqslant x\leqslant 1$. В дальней
это неравенство было доказано для некоторых дру
последовательностей полиномов.

Однако неравенство (1) представляет собою не
иное как так называемое неравенство Лагерра

$$[F^{(n)}(z)]^2-F^{(n-1)}(z)\,F^{(n+1)}(z)\geqslant 0$$

в применении в производящей функции

$$F(z)\equiv E(x,z)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}z^n\,u_n(x)/n!.$$

им Лагерром неравенство (2) было установлено для чая, когда $F(z)$ — целая функция вида

$$F(z) = Ce^{-\alpha z^2 + \beta z} z^r \prod_m (1 - z/z_m) e^{z/z_m},$$

$\alpha = 0$, β, а также C и z_m — действительные числа $\sum z_m^{-2} < \infty$.

втор показывает, что неравенство Лагерра (2) сохраняется и в предположении $\alpha > 0$, откуда следует, неравенство Турана справедливо для некоторых их последовательностей полиномов (перечень которых приводится).

анджундиа показал (Nanjundiah T. S., Half-Yearly J. sore Univ. Sect. B., 1950, **11**, 57—61), что неравенство Турана удовлетворяет последовательность первых изводных от полиномов Лежандра $\{P_n'(x)\}$. Автор ечает, что то же справедливо (при некоторых дополнительных ограничениях) для последовательности изводных (любого порядка) от ультрасферических иномов $\{P_n^{(\lambda)}(x)\}$, от функций Бесселя, полиномов ита и обобщенных полиномов Лагерра.

казываются некоторые варианты применяемых мев. В. Л. Гончаров

2. **Об одном классе систем с постоянными коэффициентами. Гаучи** (Über eine Klasse von linearen Systemen mit konstanten Koeffizienten. Gauschi Walter), Comment. math. helv., 1954, 3, № 2, 186—192; № 3, 193—196 (нем.)

следуется система функциональных уравнений

$$\varphi(A, \theta) z = 0, \qquad (1)$$

θ — линейный оператор над функциями от x, A — ратная матрица n-го порядка с числовыми элементами и

$$\varphi(u, t) = p_0(u) t^m + p_1(u) t^{m-1} + \cdots + p_m(u),$$

$p_0(u), p_1(u), \ldots, p_m(u)$ — многочлены от u; z — бец неизвестных функций от x.

танавливается теорема: Если функции $v_{\lambda,i}(x)$ удоворяют рекуррентным соотношениям

$$\sum_{j=0}^{i} \varphi_j(\lambda, \theta) v_{\lambda, i-j} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\varphi_j(\lambda, t) = (1/j!) D_\lambda^j \varphi(\lambda, t)$$

$$\left(j = 0, 1, 2, \ldots;\ \varphi_0(\lambda, t) = \varphi(\lambda, t);\ D_\lambda = \frac{d}{d\lambda}\right),$$

— p-кратное характеристическое число матрицы A, равнение (1) имеет решение

$$z(x) = \sum_{i=0}^{p-1} (A - \lambda I)^i U_{\lambda,i}(x) C, \qquad (2)$$

вектор C — произвольное решение уравнения

$$(A - \lambda I)^p C = 0.$$

случае, когда θ — дифференциальный оператор D_x) или оператор сдвига ($\theta = I + \Delta$, где I — единый, а Δ — разностный оператор), при некоторых положениях относительно φ из решений вида (2) труируется общее решение уравнения (1).

Ф. Р. Гантмахер

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

. **К оценке арифметических средних действительных чисел с помощью произведения их разностей. Дингхас** (Zur Abschätzung Arithmetischer ittel reeller Zahlen durch Differenzenprodukte derselben. Dinghas Alexander), Rend. Circolo mat. Palermo, 1953, **2**, № 2, 177—202 (нем.)

Дается оценка снизу некоторых средних арифметических довольно общего вида. Результаты настоящей работы развивают некоторые исследования Шура (Schur I., Math. Z., 1918, **1**, 377—402) и Зигеля (Siegel C. L., Ann. Math., 1945, **46**, 302—312).

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ обозначают положительные числа, $\Delta(x) = \prod (x_k - x_i)^2$ $(k > i)$; $S_k(x)$ определяются из равенства

$$\prod_1^n (1 + nx_k) = 1 + \binom{n}{1} S_1(x) n + \binom{n}{2} S_2(x) n^2 + \ldots + \binom{n}{n} S_n(x) n^n.$$

Первый основной результат работы состоит в следующем:

Имеется $n-1$ постоянных $\Phi_r(n)$ $(r = 2, \ldots, n)$, для которых выполняются неравенства

$$S_1^r(x) - S_r(x) \geqslant \Phi_r(n) \{\Delta(x) S_n(x)\}^{\frac{(r-2)(n-1)}{2}} : \binom{n}{2},$$

причем первое неравенство имеет место для $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, а остальные для $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

При $r = 2$, $r = n$ дается следующее точное значение для нижней грани $\Phi_r(n)$:

$$\Phi_r(n) = \binom{r}{2} \left\{\prod_1^n k^{-k}\right\}^{1/\binom{n}{2}}.$$

Пусть далее $r_1, \ldots, r_l$ обозначают l положительных чисел, $x_1 < x_2 < \cdots < x_l$; $y_1 < y_2 < \cdots < y_l$, $S_1(x, r) = r_1 x_1 + \ldots + r_l x_l$, $S_1(x, y, r) = x_1 y_1 r_1 + \ldots + x_l y_l r_l$, $\Delta(x, r) = \prod_{i>k} (x_i - x_k)^{2r_i r_k}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, l)$, $c(r) = \prod_{i>k} r_i r_k$. Второй основной результат работы можно сформулировать следующим образом.

Существует постоянная $C(r)$, зависящая только от r_k, для которой

$$S_1(x^2, r) - S_1^2(x, r) \geqslant C(r) \Delta(x, r)^{1/c(r)}, \qquad (1)$$

$$S_1(x, y, r) - S_1(x, r) S_1(y, r) \geqslant C^2(r) \{\Delta(\sqrt{x}, r) \Delta(\sqrt{y}, r)\}^{1/2c(r)}. \qquad (2)$$

Для постоянной $C(r)$ дается неравенство

$$C(r) > c(r) \left\{\prod_{\lambda=2}^{l} R_\lambda^{-r_\lambda R_{\lambda-1}}\right\}^{1/c(r)}, \text{ где } R_\lambda = r_1 + \ldots + r_\lambda.$$

Из (1) непосредственно получается неравенство

$$r_1 x_1 + \ldots + r_l x_l - x_1^{r_1} \cdots x_l^{r_l} \geqslant C(r) \{\Delta(\sqrt{x}, r)\}^{1/c(r)},$$

являющееся усилением неравенства Гёльдера; неравенство (2) является усилением известного неравенства Чебышева. П. Г. Когония

3814. **Об уточнении теорем Мерсера и Виджаяраghавана для колеблющихся последовательностей. Танци-Каттабьянки** (Sui teoremi di Mercer e Vijayaraghavan precisati per le successioni oscillanti. Tanzi Cattabianchi Luigi), Riv. mat. Univ. Parma, 1953, **4**, № 4—5, 337—361 (итал.)

Пусть $\{x_n\}$ — последовательность вещественных чисел,

$$X_n = (x_0 + \ldots + x_n)/(n+1), \quad \alpha_n > 0,$$

$$y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) X \text{ и } v_n = y_n/\alpha_n.$$

Доказываются следующие три теоремы, из которых 1-я и 2-я являются обобщениями результатов Виджаяраghа-

вана (Vijayaraghavan T., J. London Math. Soc., 1928, 3, 130—134).

Теорема 1. Если $0<\alpha_n\leqslant A$, то $\underline{\lim}\, y_n\leqslant\underline{\lim}\, X_n\leqslant$ $\leqslant\overline{\lim}\, X_n\leqslant\overline{\lim}\, y_n$.

Теорема 2. Если $0<\alpha'=\underline{\lim}\,\alpha_n\leqslant\overline{\lim}\,\alpha_n=\alpha''<+\infty$, $\overline{\lim}\, y_n-\underline{\lim}\, y_n=\Delta$, то

$$\underline{\lim}\, y_n-\frac{\Delta}{\alpha'}\leqslant\left\{\begin{matrix}\underline{\lim}\, x_n\\ \overline{\lim}\, y_n\end{matrix}\right\}\leqslant\underline{\lim}\, X_n\leqslant\overline{\lim}\, X_n\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\begin{matrix}\overline{\lim}\, x_n\\ \overline{\lim}\, y_n\end{matrix}\right\}\leqslant\overline{\lim}\, y_n+\frac{\Delta}{\alpha'}\,.$$

Теорема 3. Если $0<\alpha_n\leqslant A$ и $\underline{\lim}\, v_n\leqslant 0\leqslant\overline{\lim}\, v_n$, то $A\underline{\lim}\, v_n\leqslant\underline{\lim}\, X_n\leqslant\overline{\lim}\, X_n\leqslant A\overline{\lim}\, v_n$.

Рассматриваются некоторые следствия теорем 1, 2, одно из которых является обобщением теоремы Мерсера (Харди Г., Расходящиеся ряды, Изд-во иностр. лит-ры, 1951, 135). Дается новое доказательство теоремы Виджаяраghавана, согласно которой из $(1-\alpha_n)/\alpha_n>cn$ и $v_n\to 0$ следует $x_n\to 0$ и $nX_n\to 0$. Э. К. Фогелс

3815. О доказательстве основной тауберовой теоремы для C_k- и H_k-методов. Кнопп (On the proof of the main Tauberian theorem for the C_k- and H_k-methods. Knopp Konrad), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 4, 571—573 (англ.)

Дается новое простое доказательство (методом индукции) следующих тауберовых теорем:

I. Из суммируемости ряда $\sum a_\nu$, где a_ν — действительные, методом Гёльдера H_k при тауберовом условии $\nu a_\nu\leqslant M$ вытекает сходимость этого ряда.

II. Аналогичная теорема имеет место и для суммирования методом Чезаро C_k при k целом $\geqslant 2$ (Харди, Расходящиеся ряды, гл. V, VI, теоремы 49, 64).

Указано, что метод автора позволяет обобщить эти классические теоремы.

III. Пусть $\alpha_n=\sum_\nu b_{n\nu}a_\nu\,(n=0,1,\ldots)$ — преобразование ряда $\sum a_\nu$ в ряд $\sum\alpha_\nu$ и пусть $a_\nu=O(c_\nu)$ — тауберово условие для этого метода B. Тогда это же условие будет тауберовым условием для итераций метода B: $B\cdot B=B^2,\ldots,B^k=B\cdot B^{k-1},\ldots$, если $\sum_\nu|b_{n\nu}c_\nu|=O(c_n)$. Если B регулярен и $a_\nu=O(c_n)$ — наилучшее тауберово условие для B, то это условие будет наилучшим и для B^k. М. П. Щеглов

3816. О теоремах Абеля и Таубера для целых рядов с n переменными. Пейзер (Sur les théorèmes d'Abel et de Tauber pour des séries entières à n variables. Peyser Gideon), C. r. Acad. sci., 1953, 237, № 19, 1135—1137 (франц.)

Высказаны без доказательства следующие предложения:

1. Если ряд $\sum A_{p_1,\ldots,p_n}$, члены которого расположены в некотором порядке, сходится к S, то

$$f(z_1,\ldots,z_n)\equiv\sum A_{p_1,\ldots,p_n}z_1^{p_1},\ldots,z_n^{p_n}\to S,$$

когда $z_i\to 1$ по пути (или множеству точек), удовлетворяющему условиям:

1) $|z_i|<1$;

2) $|z_i-z_j|/\prod_{l=1}^{n}(1-|z_l|)<M<\infty\quad(i,j=1,\ldots,n)$;

3) $|1-z_1|/(1-|z_1|)<K<\infty$.

2. Для наперед заданного пути $z_i\to 1$, удовлетворяющего условию

$$\overline{\lim_{z_i\to 1}}\,\frac{|z_1-z_2|+\cdots+|z_i-z_j|+\cdots+|z_{n-1}-z_n|}{(1-|z_1|)\cdots(1-|z_n|)}=\infty$$

$$|1-z_i|/(1-|z_i|)<M<\infty\quad(i=1,2,\ldots,n),$$

существует ряд $\sum A_{p_1,\ldots,p_n}$, сходящийся к S при некотором расположении его членов, такой что

$$\overline{\lim_{z_i\to 1}}\,\Big|\sum A_{p_1,\ldots,p_n}z_1^{p_1}\cdots z_n^{p_n}\Big|\neq|S|.$$

Теоремы Таубера обобщены, например, следующим образом:

3. Если $\sum_{p_1+\cdots+p_n=k}|A_{p_1,\ldots,p_n}|=o(1)$ при $k\to\infty$ путь $z_i\to 1$ удовлетворяет условиям:

1') $|z_i|<1$;

2') $|z_i-z_j|/(1-|z_i|)(1-|z_j|)<M<\infty\ (i,j=1,\ldots,n)$ то $f(z_1,z_1,\ldots,z_1)-f(z_1,z_2,\ldots,z_n)\to 0$.

4. Если

$$\sum_{p_1+\cdots+p_n=k}|A_{p_1,\ldots,p_n}|=o(1),$$

$$\sum_{p_1+\cdots+p_n=k}A_{p_1,\ldots,p_n}=O(1/k)$$

при $k\to\infty$ и если $f(z_1,\ldots,z_n)\to S$, когда $z_i\to 1$ по пути, удовлетворяющему условиям 1'), 2') и 3), то $\sum A_{p_1,\ldots,p_n}=S$. А. А. Темляков

3817. О тауберовой теореме Саса. Якимовски (On a Tauberian theorem by O. Szàsz. Jakimovski Amnon), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 1, 67—70 (англ.)

Автор обобщает результаты Саса (Szász O., Pacif. J. Math., 1951, 1, 117—125) в теории тауберовых теорем. Ряд $\sum_0^\infty a_n$ (с действительными членами) суммируем (A) (методом Абеля) к числу s, если

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_0^\infty a_nx^n=s,$$

и суммируем (B) (методом Бореля) к s, если

$$\lim_{x\to\infty}e^{-x}\sum_0^\infty s_nx^n/n!=s,\quad s_n=a_0+a_1+\cdots+a_n.$$

Обозначим $w_n^0\equiv\sum_{\nu=0}^n\nu a_\nu$. В статье доказывается, что необходимым и достаточным условием сходимости ряда $\sum_0^\infty a_n$ являются:

1) суммируемость (A) и условие:

$$\lim_{m\to\infty}\inf(w_n-w_m)(n+1)^{-1}\geqslant 0 \qquad (1)$$

или

$$\lim_{m\to\infty}\inf(w_nn^{-1}-w_mm^{-1})\geqslant 0 \qquad (2)$$

при $n/m\to 1$, $n>m$;

2) суммируемость (B) и условия

$$\lim_{n\to\infty}w_n(n+1)^{-1}=0.$$

3) суммируемость (B) и условия (1) или (2) при $(n-m)/\sqrt{m}\to 0$, $n>m$.

М. П. Щеглов

3818. Множители суммируемости для метода взвешенных средних арифметических. Кангро Г., Докл. АН СССР, 1954, 99, № 1, 9—11

Формулируются условия, которым должна удовлетворять последовательность ε_k для того, чтобы всякий ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$, суммируемый (соответственно абсолютно суммируемый) методом взвешенных средних арифметических, с матрицей $a_{nk} = 1 - P_{k-1}/P_n$ при $k \leqslant n$ и $=0$ при $k > n$ ($P_{-1} = 0$, $P_n \neq 0$ $(n > 0)$, $P_k \neq P_{k-1}$) преобразовывался в ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k u_k$, суммируемый (соответственно абсолютно суммируемый) данным регулярным или абсолютно регулярным методом B. Так, например, если $\{b_{nk}\}$ — матрица, соответствующая регулярному методу B, а метод P сохраняет сходимость, то любой ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$, суммируемый методом P, будет переходить в ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k u_k$, суммируемый методом B, тогда и только тогда, когда

$$1) \sum_{k=0}^{\infty} \left| P_k \Delta \left(\frac{\Delta \varepsilon_k}{P_k - P_{k-1}} \right) \right| < \infty \text{ и } P_k \Delta \varepsilon_k = O(P_k - P_{k-1}),$$

$$2) \sum_{k=0}^{\infty} \left| P_k \varepsilon_{k+1} \Delta \left(\frac{\Delta b_{nk}}{P_k - P_{k-1}} \right) \right| = O(1),$$

3) $b_{nk} P_k \varepsilon_k = O(P_k - P_{k-1})$, $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$.

С указанной точки зрения рассматривается также класс рядов $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$, для которых P-средние, т. е. $\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} u_k$, ограничены.

Некоторые частные случаи ранее рассматривались в работах Юрката и Пейеримхоффа (Jurkat W., Math. Z., 1951, 54, 262—271; Peyerimhoff A., Math. Z., 1951, 55, 33—54; РЖМат, 1953, 800; Jurkat W., Peyerimhoff A., Math. Z., 1951, 55, 92—108; РЖМат, 1953, 2205), а также в работе Гарабедяна и Рандельса (Garabedian H. L., Randels W. C., Duke Math. J., 1938, 4, 529—533).

А. Ф. Тиман

3819. Об одном методе суммирования расходящихся рядов. Делаж (Sur un procédé de sommation des séries divergentes. Delange Hubert), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 93—94 (франц.)

Метод суммирования ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

определяется функцией $g(t)$, а именно под суммой ряда понимается предел функции $\sum_{n \leqslant x} g(n/x) u_n$ при $x \to \infty$. Рассматривается частный случай (S, α) этого метода при $g(t) = (1+t)^{-\alpha}$, $\alpha > 0$. Без доказательства формулируются следующие результаты:

1. Если ряд (1) суммируем (S, α) и $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta} u_n$ сходится при $0 < \beta < \alpha$, то этот ряд суммируется к той же сумме методом (S, γ) при $\beta \leqslant \gamma < \alpha$.

2. Если ряд (1) суммируется методом Абеля и $s_0 + \ldots + u_n = o(n^{\alpha})$, $\alpha > 0$, то он суммируем к той же сумме методом (S, β) для всех $\beta \geqslant \alpha$.

3. Суммируемость (C, α) влечет суммируемость (S, β) к той же сумме для всех $\beta \geqslant \alpha$.

4. Если $0 < \alpha < \beta$, то существуют ряды, суммируемые (S, β) (или (C, β)) и не суммируемые (S, α).

В заключение формулируется несколько нерешенных проблем.

Ф. В. Широков

3820. О суммировании методом Рисса и суммировании посредством рядов Дирихле (дальнейшие дополнения и уточнения). Раджагопал (On Riesz summability and summability by Dirichlet's series: A further addendum and corrigendum. Rajagopal C. T.), Amer. J. Math., 1954, 76, № 1, 252—258 (англ.)

Автор развивает свои идеи, изложенные в предыдущей статье (Amer. J. Math., 1947, 69, 371—378, 851—852). Пусть $A(u)$ $(u \geqslant 0)$ — функция ограниченной вариации на любом конечном интервале $A(0) = 0$,

$$\sigma_r(x) = r x^{-r} \int_0^x (x-u)^{r-1} A(u)\, du, \quad r > 0.$$

Доказывается следующая основная теорема: Пусть

$$\overline{\lim}_{x \to \infty} \sigma_r(x) = \bar{\sigma}_r, \quad \underline{\lim}_{x \to \infty} \sigma_r(x) = \underline{\sigma}_r,$$

$$\lim_{r \to \infty} \bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_{\infty}, \quad \lim_{r \to \infty} \underline{\sigma}_r = \underline{\sigma}_{\infty}.$$

Если $\bar{\sigma}_{\infty} = \underline{\sigma}_{\infty} = s$ (конечное), тогда для всех достаточно больших r имеет место $\bar{\sigma}_r = \underline{\sigma}_r = s$.

Аналогичная теорема имеет место и для преобразования рядов $\sum a_n$ по методу Чезаро (теорема t').

М. П. Щеглов

3821. О взаимоотношении между методами суммирования Абеля и (C, α, β). Челидзе В. Г., Тр. Тбилис. ун-та, 1953, 50, 13—22 (резюме груз.)

Рассматривается класс двойных рядов $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}$, удовлетворяющих при некоторых $\alpha, \beta > -1$; $\gamma, \delta > 0$ следующим условиям:

1) ряд $f(x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n$ для $|x| < 1, |y| < 1$ абсолютно сходится;

2) существуют $\lim_{m \to \infty} (\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} / A_m^{\gamma}) = \alpha_n^*$

$$\lim_{n \to \infty} (\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} / A_n^{\delta}) = \beta_m^*$$

такие, что $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^* A_n^{\beta} = 0$ и $\sum_{m=0}^{\infty} \beta_m^* A_m^{\alpha} = 0$, где

$$A_m^{\alpha} = (\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+m)/m!,$$

$$\sigma_{mn}^{\alpha,\beta} = (A_m^{\alpha} A_n^{\beta})^{-1} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} A_{m-i}^{\alpha} A_{n-j}^{\beta} a_{ij}.$$

Устанавливается следующая теорема: Если ряд $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}$ удовлетворяет условию 2) при $\gamma \cdot \delta \leqslant (\alpha+1)(\beta+1)$ и, кроме того, суммируем методом (C, α, β) к числу s, то $\lim f(x, y) = s$, когда x и y стремятся к 1, удовлетворяя неравенству

$$\lambda^{-1} |1-y|^{(\beta+1)/\gamma} \leqslant |1-x| \leqslant \lambda |1-y|^{\delta/(\alpha+1)}.$$

Для $\alpha_n^* = \beta_m^* = 0$ $(m, n = 0, 1, 2, \ldots)$ эта теорема была доказана референтом (Докл. АН СССР, 1951, 76, № 5, 647—649).

М. Ф. Тиман

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

3822. Теоремы разложения для G-функций. VI. Мейер (Expansion theorems for the G-function. VI. Meijer C. S.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, **A57**, № 1, 77—82 (англ.)

(Части III, IV см. РЖМат, 1953, 796, 797; часть V см. РЖМат, 1954, 4082). В леммах, необходимых для доказательства теорем части VII (см. реф. 3823), вычислен ряд контурных интегралов, в которых подинтегральные выражения содержат в качестве множителей функции ${}_k\varphi_k(a_i; \beta_j; -u)$, $G_{m,n}^{p,q}$ (РЖМат, 1953, 796) и $(-u)^{\alpha}$, $(1+cu^{-1})^{\beta}$.

Л. М. Глускин

3823. Теоремы разложения для G-функций. VII. Мейер (Expansion theorems for the G-function. VII. Meijer C. S.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, **A57**, № 1, 83—91; Indagationes math., 1954, 16, № 1, 83—91 (англ.)

Исходя из теорем III и IV частей статьи, автор доказывает теоремы, содержащие 4 разложения G функций, аналогичные формулам, приведенным в РЖМат, 1953, 796, 797. Л. М. Глускин

3824. Теоремы разложения для G-функций. VIII. Формулы преобразования для обобщенных гипергеометрических функций. Мейер (Expansion theorems for the G-function. VIII. Transformation formulae for generalized hypergeometric functions. Meijer C. S.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, **A57**, № 3, 273—279; Indagationes math., 1954 **16**, № 3, 273—279 (англ.)

Автор отмечает, что многие специальные функции, в том числе функции Бесселя и Уиттекера, могут быть выражены через G-функции. Частными случаями теорем III и IV частей статьи (РЖМат, 1953, 796, 797) является обычный ряд Тэйлора, теорем V и VII частей (РЖМат, 1954, 4082; 1955, 3323) — разложение по полиномам Лагерра.

Полагая в теореме части V $k=l=1$, $\lambda=1$ или $\lambda=2$, автор получает формулу

$$\left(\frac{w}{1+w}\right)^b {}_2\varphi_1\left(c-a,\ b;\ c;\ \frac{1}{1+w}\right) = \frac{\pi}{\sin(b-a)\pi}\left\{\frac{w^a}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-a)}\,{}_2\varphi_1(a,\ 1+a-c;\ 1+a-b;\ -w) - \frac{w^b}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-b)}\times {}_2\varphi_1(b,\ 1+b-c;\ 1+b-a;\ -w)\right\} \qquad (1)$$

и ряд других известных тождеств для гипергеометрических функций ${}_2\varphi_1$ и ${}_1\varphi_1$ (Barnes E. W., Proc. London Math. Soc., 1908, 6, 141—177; Kummer E. E., J. reine und angew. Math., 1836, 15, 127—172). При $m=n=p=q=\lambda=1$ из теоремы части III получено соотношение между обобщенными гипергеометрическими функциями $G^{l+1,\,1}_{l+1,\,l+1}$ и ${}_{l+1}\varphi_l$, обобщающее формулу (1).

Л. М. Глускин

3825. Полиномы, обобщающие некоторые из классических и ассоциированных с ними, и соотношения между ними. Функции второго рода. Палама (Polinomi più generali di altri classici e dei loro associati, e relazioni tra essi. Funzioni di seconda specie. Palamà Giuseppe), Riv. mat. Univ. Parma, 1953, **4**, № 4—5, 363—386 (итал.)

Пусть $M_n(x)$ и $m_n(x)$ — соответственно полином степени n и некоторая функция переменного x, зависящая от n (n — целое $\geqslant 0$; $M_n \equiv 0$ при $n<0$), а также от некоторых параметров, которые не выписаны, и пусть выполнены соотношения вида

$$M_{n-1}(x)\,m_n(x) - M_n(x)\,m_{n-1}(x) = W_n(x),$$

$$\mu_{n+1}(x) = (a_n + b_n x)\,\mu_n(x) - c_n \mu_{n-1}(x),$$

где через $\mu_n(x)$ обозначено безразлично $M_n(x)$ или $m_n(x)$. Из последнего соотношения выводится, что

$$\mu_{n+p}(x) = T^{n,\,p}(x)\,\mu_n(x) + T_1^{n,\,p}(x)\,\mu_{n-1}(x),$$

где $T^{n,\,p}(x)$ и $T_1^{n,\,p}(x)$ обозначают полиномы степени соответственно p и $p-1$. Эти полиномы и являются предметом рассмотрения в настоящей статье: автор называет их обобщением классических полиномов, а также полиномов, с ними ассоциированных (см. РЖМат, 1954, 4466, 5642, где объяснены терминология и обозначения).

Следуют приложения к специальным случаям полиномов. Лагерра, Эрмита и ультрасферических:

а) $M_n(x) = L_n^{(\alpha)}(x)$, $m_n(x) = l_n^{(\alpha)}(x)$, ($\alpha$ не целое)

б) $M_n(x) = H_n(x)$, $m_n(x) = h_n(x)$,

в) $M_n(x) = P_n^{(\nu)}(x)$, $m_n(x) = Q_n^{(\nu)}(x)$ В. Л. Гончаров

3826. Многочлены, ассоциированные с классическими. Тоскано (Polinomi associati a polinomi classici. Toscano Letterio), Riv. mat. Univ. Parma, 1953, 4, № 4—5, 387—402 (итал.)

Классическими многочленами автор называет ультрасферические многочлены Якоби $P_n^{(\alpha)}(x)$, обобщенные многочлены Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x)$ и многочлены Эрмита $H_n(x)$. Им сопоставляются так называемые функции Якоби, Лагерра и Эрмита второго рода $Q_n^{(\alpha)}(x)$, $l_n^{(\alpha)}(x)$ и $h_n(x)$, являющиеся вторыми решениями тех линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка, которым удовлетворяют сами упомянутые многочлены. Известны формулы

$$Q_n^{(\alpha)}(x) = P_n^{(\alpha)}(x)\,Q_0^{(\alpha)}(x) - \Gamma(2\alpha)\,(x^2-1)^{-\alpha+1/2}\,R_{n-1}^{(\alpha)}(x),$$

$$l_n^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x)\,l_0^{(\alpha)}(x) + \Gamma(\alpha+1)\,x^{-\alpha}e^x F_{n-1}^{(\alpha)}(x),$$

$$h_n(x) = H_n(x)\,h_0(x) - e^{x^2/2}\,G_{n-1}(x),$$

в которых $R_{n-1}^{(\alpha)}(x)$, $F_{n-1}^{(\alpha)}(x)$ и $G_{n-1}(x)$ суть многочлены степени $n-1$. Эти многочлены и являются предметом работы. Устанавливаются многочисленные (частью уже известные) их свойства, например рекуррентные соотношения между ними, вещественность их корней, различные формулы, связывающие эти функции, и т. п. Доказательства лишь намечены. И. П. Натансон

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

3827. Преобразование Стилтьеса, убывающее как показательная функция. Вучкович (Стилтјесова трансформација која опада брзином експоненцијалне функције. Вучковић Владета), Зб. радова Српска АН, 1953, 35, № 3, 255—288 (серб.; резюме нем.)

Основные результаты относятся к поведению преобразования Лапласа функций, преобразования Стилтьеса которых определенным образом убывают на бесконечности. Так (теорема 1.1), если $A(u)$ — функция ограниченного изменения на любом конечном отрезке $A(0)=0$, и при $x\to\infty$

$$\int_0^\infty (u+x)^{-1}\,dA(u) = O(e^{-x^\alpha}),$$

где $0<\alpha<1/2$, то функция

$$\chi(s) = \int_0^\infty e^{-su}\,u^\gamma A(u^{1/\alpha})\,du \quad (\gamma>-1),$$

регулярная в полуплоскости $\mathrm{Re}\,s>0$, является еще регулярной и в точке $s=0$. Кроме того, доказываются некоторые теоремы тауберова типа, как, например (теорема 2.1): Если в дополнение к условиям теоремы 1.1 еще предположить, что для $\beta>-\alpha$ и $u\leqslant v\leqslant u+u^{1-\alpha}$, $u^\beta[A(v)-A(u)]>-m$, то $u^\beta A(u)=O(1)$ при $u\to\infty$. В. И. Левин

3828. Изложение некоторых известных и новых теорем об обыкновенной и равномерной сходимости интеграла Фурье. Сан-Хуан, Родригес-Салинас (Exposicion de algunos teoremas conocidos y otros nuevos sobre convergencia ordinaria y uniforme de la integral de Fourier. San Juan R., Rodríguez-Salinas B.), Rev. Real. acad. cienc. exact., fis. y natur., Madrid, 1953, 47, № 4, 495—510 (исп.; резюме франц.)

Даются условия сходимости и равномерной сходимости интеграла Фурье $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} f(t)\,dt$, где $f(t) \in L^{\alpha}(-\infty,\infty)$ ($1 < \alpha \leqslant 2$). Условия формулируются в терминах преобразования Фурье функции $f(t)$ и легко получаются из известных результатов. Б. И. Коренблюм

3829. Обобщение комплексной формулы обращения для преобразования Лапласа. Р у н и (A generalization of the complex inversion formula for the Laplace transformation. R o o n e y P. G.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 3, 385—391 (англ.)

Пусть $f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \varphi(t)\,dt$. Доказывается, что для $\operatorname{Re}\beta > 0$, $\beta \neq 1,2,\ldots$, имеет место формула обращения

$$(\varphi(t+0) + \varphi(t-0))/2 =$$

$$= [2\pi i\,\Gamma(1-\beta)]^{-1} P \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} (st)^{-\beta}\, {}_1F_1(1,1-\beta;st) f(s)\,ds, \quad (1)$$

если $\varphi(u)$ имеет ограниченное изменение в окрестности точки t; P — главное значение в смысле Коши, а число γ выбрано из условия, что $e^{-\gamma t}\varphi(t) \in L(0,\infty)$. При $\beta = 0$ формула (1) превращается в обычную формулу обращения для преобразования Лапласа.

Указываются условия применимости формулы (1) при $\operatorname{Re}\beta < 0$. Формула (1) имеет также некоторый смысл при $\beta = 1,2,\ldots$ Б. М. Левитан

3830. Одна теорема операционного исчисления. К у м а р (A theorem on operational calculus. K u m a r R a m), Bull. Calcutta Math. Soc., 1954, **46**, № 1, 37—40 (англ.)

Доказывается, что функция $f(p) = p\int_0^{\infty} e^{-ps}\varphi(s)\,ds$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$(p+b) = \mu(p+b)\int_0^{\infty} \frac{x^{\lambda}}{x+b} J_{\lambda}^{\mu}\{(p-c)x^{\mu}\} f(x+b)\,dx,$$

если выполняется соотношение $\varphi(s) = s^{(\lambda-\mu)/\mu}\exp[(c+b)s - bs^{-1/\mu}]\,\varphi(s^{-1/\mu})$. Теорема верна при $\varphi(x) = O(x^{-1+\varepsilon})$ для малых значений x и $\varphi(x) = O(x^{\eta}e^{cx})$ для больших значений x в предположениях: $\operatorname{Re} p > 0$; $\operatorname{Re}\lambda > -1$; $-1 < \mu < 1$; $\operatorname{Re}(p-k) > 0$; $\operatorname{Re}(b-k) > 0$; $\operatorname{Re}(p-c) > 0$. Теорема выполняется также при $\operatorname{Re}(b-k) = 0$, если $\operatorname{Re}(\lambda-\eta) > 0$, и при $\mu = 1$, если $\operatorname{Re}(\lambda - 2\eta) < 5/2$.

Функция $J_{\lambda}^{\mu}(x)$ определяется соотношением

$$J_{\lambda}^{\mu}(x) = \Sigma_{r=0}^{\infty}(-x)^r / r!\,\Gamma(1+\lambda+\mu r) \quad (\mu > 0).$$

Доказательство основано на применении равенства Парсеваля — Гольдстейна к соотношениям $\varphi(s) = f(p)$; $e^{-bs}\varphi(s) \doteqdot [p/(p+b)]\,f(p+b)$, $\operatorname{Re}(p+b-k) > 0$ и $s^{\lambda} J_{\lambda}^{\mu}(as^{\mu}) \doteqdot p^{-\lambda}\exp(-ap^{-\mu})$; $\mu > 0$, $\operatorname{Re}\lambda > -1$, $\operatorname{Re} p > 0$. Даются некоторые приложения этой теоремы. Л. Я. Цлаф

3831. Об одном операционном соотношении. Г у п т а (An operational relation. G u p t a H. C.), Math. Z., 1954, **61**, № 1, 70—74 (англ.)

Пусть $h(x) \equiv \Sigma_{r=0}^{\infty} G(r)/(r!\;x^{\rho+1+\nu r})$, где $\nu > 0$ и $G(r) \equiv \Pi_{q=1}^{m}\{\Gamma(a_q + \alpha_q r)/\Gamma(b_q + \beta_q r)\}$ ($\operatorname{Im}\beta_q = 0$, $\alpha_q > 0$, $\Sigma(\beta_q - \alpha_q) > -1$, $\Sigma(|\beta_q| - \alpha_q) < 1$, $\operatorname{Re}(\gamma a_q/\alpha_q - \rho) > 0$).

Доказывается, что операционным изображением функции $h(x)$ служит функция

$$f(p) \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!}\left\{G(r)\,\Gamma(-\nu r - \rho)\,p^{\nu r+\rho+1} + \frac{1}{\nu}\,\Gamma\left(\frac{\rho-r}{\nu}\right) G\left(\frac{r-\rho}{\nu}\right) p^{r+1}\right\}.$$

В ходе доказательства используется представление $f(p)$ в виде контурного интеграла типа Барнса и асимптотическое разложение для $f(p)$.

Результат автора служит обобщением некоторых ранее известных операционных формул (см., например, Диткин В. А., Кузнецов П. И., Справочник по операционному исчислению, М.—Л., 1951, 224, формула 9.115). М. Б. Балк

3832. О некоторых последовательностях преобразований Лапласа. С р и в а с т а в а (On some sequences of Laplace transforms. S r i v a s t a v a H. M.), Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1953, **67**, sér. I, № 3, 218—228 (англ.)

Выводится ряд формул операционного исчисления для функций многих переменных. Равенство

$$\Phi(p_1,\ldots,p_n) = p_1\ldots p_n \times \int_0^{\infty}\ldots\int_0^{\infty} e^{-\Sigma_{i=1}^{n} p_i x_i} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1,\ldots,dx_n$$

сокращенно будем записывать в виде $\Phi(p_1,\ldots,p_n) \underset{n}{\div\to} f(x_1,\ldots,x_n)$. При $n = 1$ индекс под стрелкой опускается. Автор выводит следующие формулы:

1. Если $h(p) \div\to F(x)$ и $p^{-m}F(p) \div\to g(x)$ ($m \geqslant 0$ — целое), то $p^{-m}h(q/p) \underset{2}{\div\to} y^m g(x/y)$ и $q^{-m}h(p/q) \underset{2}{\div\to} x^m g(y/x)$.

2. Если $F_1(x) \underset{\cdot}{\leftarrow} h(p)$, $F_2(x) \underset{\cdot}{\leftarrow} p^{-m_1}F_1(p)$, $F_3(x) \underset{\cdot}{\leftarrow} p^{-m_2}F_2(p)$, то $r^{m_1-m_2}q^{-m_1}h(pr/q) \underset{3}{\div\to} x^{m_1-m_2}y^{m_2} \times F_3(xz/y)$.

3. Если $F(x) \underset{\cdot}{\leftarrow} h(p)$ и $p^{-\lambda}F(p^{-\mu}) \div\to \sigma(x)$, то $p^{-\lambda}h(p^{\mu}q) \underset{2}{\div\to} y^{-\lambda/\mu}\sigma(xy^{1/\mu})$.

4. Если $f(x) \underset{\cdot}{\leftarrow} h(p)$ и $\sqrt{x}\,f(\sqrt{x}) \underset{\cdot}{\leftarrow} \Phi(p)$, то $\frac{pqh(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} \underset{2}{\div\to} \frac{1}{2\pi(x+y)\sqrt{xy}}\,\Phi\left(\frac{x+y}{4xy}\right)$.

5. Если $f(x) \underset{\cdot}{\leftarrow} h(p)$ и $g(\sqrt{p}) \div\to \Phi(x)$, где $g(p) = p[h(p)/p]^{\alpha}$, то

$$\frac{pqh(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} \underset{2}{\div\to} \frac{1}{4xy\sqrt{\pi(x+y)}}\,\Phi\left(\frac{xy}{x+y}\right).$$

Формулы 3, 4 и 5 обобщаются на n переменных:

3′. Если $F(x_1,\ldots,x_n) \underset{n}{\leftarrow} h(p_1,\ldots,p_n)$ и если

$$p_1^{-\lambda_1}\ldots p_n^{-\lambda_n} F(p_1^{-\mu_1},\ldots,p_n^{-\mu_n}) \underset{n}{\div\to} \sigma(x_1,\ldots,x_n),$$ то

$$p_1^{-\lambda_1}\ldots p_n^{-\lambda_n} h(p_1^{\mu_1}p_{n+1},\ldots,p_n^{\mu_n}p_{2n}) \underset{2n}{\div\to}$$
$$\underset{2n}{\div\to} x_{n+1}^{-\lambda_1/\mu_1}\ldots x_{2n}^{-\lambda_n/\mu_n}\sigma(x_1 x_{n+1}^{1/\mu_1},\ldots,x_n x_{2n}^{1/\mu_n}).$$

4′. Если $f(x_1,\ldots,x_n) \underset{n}{\leftarrow} h(p_1,\ldots,p_n)$ и если

$$\sqrt{x_1\ldots x_n}\,f(\sqrt{x_1},\ldots,\sqrt{x_n}) \underset{n}{\leftarrow} \Phi(p_1,\ldots,p_n),$$ то

$$\frac{p_1\ldots p_n h(\sqrt{p_1}+\sqrt{p_{n+1}},\ldots,\sqrt{p_n}+\sqrt{p_{2n}})}{(\sqrt{p_1}+\sqrt{p_{n+1}})\ldots(\sqrt{p_n}+\sqrt{p_{2n}})} \underset{2n}{\div\to}$$
$$\underset{2n}{\div\to} \Phi\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{4x_1x_{n+1}},\ldots,\frac{x_n+x_{2n}}{4x_nx_{2n}}\right)$$

5'. Если $f(x_1, \ldots, x_n) \underset{n}{\div} h(p_1, \ldots, p_n)$ и если $g(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n}) \underset{n}{\div} \psi(x_1, \ldots, x_n)$, где $g(p_1, \ldots, p_n) = p_1 \ldots p_n \dfrac{\partial^{2n}}{\partial p_1^2 \ldots \partial p_n^2}\left[\dfrac{h(p_1, \ldots, p_n)}{p_1 \ldots p_n}\right]$, то

$$\frac{p_1 \ldots p_n\, h(\sqrt{p_1}+\sqrt{p_{n+1}}, \ldots, \sqrt{p_n}+\sqrt{p_{2n}})}{(\sqrt{p_1}+\sqrt{p_{n+1}}) \ldots (\sqrt{p_n}+\sqrt{p_{2n}})} \underset{2n}{\div}$$

$$\frac{\psi\left(\dfrac{x_1 x_{n+1}}{x_1+x_{n+1}}, \ldots, \dfrac{x_n x_{2n}}{x_n+x_{2n}}\right)}{(x_1 \ldots x_n)\, 4^n \pi^{n/2} \sqrt{(x_1+x_{n+1}) \ldots (x_n+x_{2n})}} \underset{2n}{\div} .$$

Приводится большое число примеров. Б. М. Левитан

См. также: 3548 К, 3586, 3773 К, 3774 К, 3784, 3838, 3903 К

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

3833. О приближениях в вещественных пространствах Банаха. Курцвейль (On approximation in real Banach spaces. Kurzweil J.), Studia math., 1954, 14, № 2, 214—231 (англ.)

Автор решает задачу о возможности равномерной аппроксимации каждой непрерывной операции (отображающей вещественное пространство Банаха X в вещественное пространство Банаха Y при помощи вещественных аналитических операций, исследованных недавно Алексевичем и Орличем (РЖМат, 1954, 4475).

Основные результаты работы:

I. Пусть X — вещественное, сепарабельное пространство Банаха такое, что существует вещественный многочлен $q(x)$, удовлетворяющий условиям

$$q(0) = 0, \quad \inf_{\|x\|=1} q(x) > 0. \tag{1}$$

Пусть $F(x)$ — непрерывная операция, отображающая некоторое открытое множество $G \subset X$ в некоторое пространство Банаха Y, и пусть $\varphi(x)$ — положительный непрерывный функционал, определенный в G. Тогда существует аналитическая операция $H(x)$ такая, что

$$\|F(x) - H(x)\| < \varphi(x) \quad \text{для} \quad x \in G.$$

Многочлен q, удовлетворяющий условиям (1), существует в случае $X = L^p$ или $X = l^p$, где $p = 2, 4, 6, \ldots$ (например, $q(x) = \|x\|^p$). Поэтому каждая непрерывная операция, определенная в этих пространствах, может быть сколь угодно точно аппроксимирована аналитической.

II. Пусть $F(x)$ — непрерывная, регулярно дифференцируемая операция, отображающая единичный шар пространства C (всех непрерывных функций на единичном отрезке) в слабо полное пространство Банаха. Для произвольных положительных чисел r и $\varepsilon (r + \varepsilon \leqslant 1)$ существует точка $x \in C$ такая, что

$$r \leqslant \|x\| < r + \varepsilon \text{ и } \|F(x) - F(0)\| < \varepsilon.$$

Поэтому функционал $F(x) = \|x\|$ $(x \in C)$ не является равномерным пределом последовательности регулярно дифференцируемых функционалов, определенных в единичном шаре пространства C.

III. Пусть $p \geqslant 1$, $p \neq 2, 4, 6, \ldots$ Пусть $\bar{p}$ — наименьшее натуральное число, большее или равное p, и пусть r, ε — положительные числа $(r + \varepsilon \leqslant 1)$. Для каждого p раз регулярно дифференцируемого функционала $f(x)$, определенного в единичном шаре пространства L^p, существует точка $x \in L^p$ такая, что $r \leqslant \|x\| < r + \varepsilon$ и $\|f(x) - f(0)\| \leqslant \varepsilon \|x\|$. Поэтому функционал $\|x\|$ не является равномерным пределом последовательности $\bar{p}$ раз регулярно дифференцируемых функционалов в единичном шаре пространства L^p.

Такая же теорема справедлива и для пространства l^p $(p \geqslant 1;\ p \neq 2, 4, 6, \ldots)$.

R. Sikorski

3834. Вполне интегрируемые дифференциальные уравнения с частными производными в линейных нормированных пространствах. Майкал (Completely integrable partial differential equations in normed linear spaces. Michal A. D.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, **39**, № 10, 1089—1094 (англ.)

Пусть N_1, N_2, N_3 — три комплексных пространства Банаха, N_{ij} — пространство Банаха линейных преобразований N_i в N_j; $N_{i,\,jk}$ — пространство Банаха линейных преобразований N_i в N_{jk} и т. д.

Рассматривается функциональное уравнение

$$z(x,\ y;\ \delta x) = F(x,\ y,\ z,\ z_y,\ \delta x), \tag{1}$$

где независимые переменные x и y принимают значения из N_1 и N_2 соответственно, а искомая функция $z(x, y)$ из N_3; $z(x, y, \delta x)$ — дифференциал Фреше от z, а z_y — частная производная Мичэла — Фреше от $z(x, y)$ по y. $F(x, y, z, w, v)$ — заданная функция пяти переменных, линейная по v, аргументы которой, очевидно, берутся соответственно из N_1, N_2, N_3, N_{23}, N_1. Для уравнения (1) доказано следующее условие полной интегрируемости:

$$F_{z_y}(x, y, z, z_y, \delta_1 x)[F_{zy}(x, y, z, z_y, \delta_2 x)\, z_{yy}]\,\Big|_{\delta_1 x}^{\delta_2 x} = 0, \tag{2}$$

$$F(x, y, z, z_y, \delta_1 x;\ \delta_2 x) + F_z(x, y, z, z_y, \delta_1 x) \times$$
$$\times F(x, y, z, z_y, \delta_2 x) + F_{zy}(x, y, z, z_y, \delta_1 x) \times$$
$$\times [F_y(x, y, z, z_y, \delta_2 x) + F_z(x, y, z, z_y, \delta_2 x) \cdot z_y]\,\Big|_{\delta_1 x}^{\delta_2 x} = 0. \tag{3}$$

Все слагаемые, входящие в левые части этих двух равенств, принадлежат N_3, а сами равенства должны удовлетворяться тождественно по всем переменным. Указаны также примеры, где эти условия упрощаются.

Пусть теперь, кроме уравнения (1), задано условие Коши

$$z(x_0,\ y) = z_0(y). \tag{4}$$

Методом последовательных приближений доказывается теорема:

Пусть $z_0(y)$ аналитична при $\|y - y_0\| < \bar{a}$, дифференциал Фреше $d^{xuyzw}_{\xi\eta\zeta\theta} F(x, y, z, w, \delta x)$ непрерывен по совокупности аргументов, когда $\|x - x_0\| \leqslant a$, $\|y - y_0\| < \bar{a}$, $\|z - z_0(y_0)\| \leqslant b$, $\|w - z_{0y}(y_0)\| \leqslant \bar{b}$, а $\delta x \in N_1$ — любое. Пусть, кроме того, условия (2), (3) выполнены тождественно в указанных только что областях. Тогда существуют положительные $c \leqslant a$ и $d \leqslant \bar{a}$ и единственная непрерывная функция $z(x, y)$, удовлетворяющая (1) и (4) в области $\|x - x_0\| \leqslant c$, $\|y - y_0\| < d$, такая что для этих x и y $\|z - z_0(y_0)\| \leqslant b$, $\|w - z_{0y}(y_0)\| \leqslant \bar{b}$ и для любых $\delta x \in N_1$ и $\zeta \in N_3$, $\theta \in N_{23}$

$$\|d^{zw}_{\zeta\theta} F(x, y, z, w, \delta x)\| \leqslant g \cdot \|\delta x\| \cdot \|\zeta,\ \theta\|$$

для некоторого $g>0$, где через $\|\zeta, \theta\|$ обозначена норма в произведении пространств $N_3 \times N_{23}$.

Статья развивает прежние исследования автора.

Р. А. Александрян

3835. **Принципы теории линейных операторов.** Дель-Пасқуа, Пеллегрино (Principi di una teoria degli operatori lineari. Del Pasqua Dario, Pellegrino Franco), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 77—81 (итал.)

Пусть линейные операторы L и $\overline{L}$ таковы, что $\overline{L}Ly = y$ для всех y. Тогда, если существует $L\overline{L}$, то для всех y выполнено равенство $L\overline{L}\,\overline{y} = \overline{y} - \overline{\zeta}$, где $\overline{\zeta}$—нуль оператора $\overline{L}$. Оператор $\overline{\zeta} = \overline{Z}\overline{y}$ идемпотентен. $ZLy = 0$ для всех y. Эти свойства обобщают соотношения между операторами дифференцирования и интегрирования. Дается также абстрактное определение оператора замены переменной. Область определения оператора $\overline{L}$ является прямой суммой области значений оператора L и области нулей оператора $\overline{L}$. Указана возможность применения этих результатов к теории аналитических операторов.

Н. Я. Виленкин

3836. **О теореме Вейерштрасса — Стоуна.** Коси (On Weierstrass-Stone's theorem. Koshi Shozo), J. Math. Soc. Japan, 1953, 5, № 3—4, 351—352 (англ.)

Пусть $C(\Omega)$ — нормированное кольцо всех вещественных непрерывных функций $f(x)$ на бикомпакте Ω и $C^*(\Omega)$ — пространство всех линейных функционалов над $C(\Omega)$. В частности, элементами $C^*(\Omega)$ являются функционалы вида $\mu_x(f) = f(x)$, $x \in \Omega$. Совокупность $\mathfrak{S} \subseteq C^*(\Omega)$ называется «вейерштрассовой», если из условий: 1) B замкнутое подкольцо в $C(\Omega)$ содержит $f(x) \equiv 1$, 2) для любых различных φ, $\psi \in \mathfrak{S}$ найдется элемент $f \in B$ такой, что $\varphi(f) \neq \psi(f)$ — вытекает $B = C(\Omega)$. В силу теоремы Стоуна (см., например, Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е., Успехи матем. наук, 1946, 1, № 2(12), 48—146) совокупность всех $\mu_x(f)$ вейерштрассова. Автор устанавливает следующий критерий: $\mathfrak{S} \subseteq C^*(\Omega)$ вейерштрассова тогда и только тогда, когда для любых различных точек x_1, $x_2 \in \Omega$ можно найти $\varphi, \psi \in \mathfrak{S}$ и число $p \neq 0$ такие, что

$$\mu_{x_1} - \mu_{x_2} = p(\varphi - \psi).$$

Аналогичное условие формулируется для вполне регулярного Ω (вообще уже не бикомпактного); вместо μ_{x_1} и μ_{x_2} используются любые функционалы μ_1 и μ_2 с нормой 1 и с условиями $\mu_1(1) = \mu_2(1) = 1$. Г. Е. Шилов

3837. **Инвариантные интегралы (средние) в одном классе пространств Банаха.** Робисон (Invariant integrals over a class of Banach spaces. Robison Gerson B.), Pacif. J. Math., 1954, 4, № 1, 123—150 (англ.)

Обозначения: S — компактное топологическое пространство; t, t', t_1 — точки из S, X — пространство Банаха, состоящее из (некоторых) ограниченных вещественных функций на S с нормой $\|x\| = \sup_{t \in S} |x(t)|$, $x \in X$. $F \subseteq X$ — замкнутая линейная оболочка F совпадает с X. Для $x \in X$ пусть $O[x] = \sup_{t \in S} x(t) - \inf_{t \in S} x(t)$ и X^* — пространство, сопряженное с X.

G — полугруппа линейных ограниченных операторов X, ограниченная по норме ($\|T\| \leqslant K$ при всех $T \in G$). G_1 — выпуклая оболочка G. Если $x \in X$, то $K[x]$ — замыкание $G_1 x$ в X, где $G_1 x = \{Tx\}_{T \in G_1}$.

Теорема 4.1. Пусть 1) для каждого $x \in F$ и $V \in G_1$ выполняется $Vx \in F$, 2) константы являются фикспунктами G, и F содержит константу $\neq 0$,3) для каждого $x \in F$ имеется точно одна константа x, принадлежащая $K[x]$. Тогда имеется элемент $x^* \in X^*$ такой, что $x^*(e) = 1$, (где $e(t) \equiv 1$ при $t \in S$), $x^*(Tx) = x^*(x)$ при $T \in G$, если $\inf x(t) \geqslant 0$, то $x^*(x) \geqslant 0$ и если, кроме того, $x \neq 0$, то $x^*(x) > 0$, для $x \in F$. x^* и есть инвариантное среднее относительно G; оно строится по формуле $x^*(x) = \overline{x}$.

Будем говорить, что элемент $x \in X$ удовлетворяет условию (A_1), если для каждого $t_0 \in S$

$$\sup_{V \in G_1} [V(x)](t_0) = \sup_{t \in S} x(t), \quad \inf_{V \in G_1} [V(x)](t_0) = \inf_{t \in S} x(t).$$

Теорема 5. Пусть элемент $x \in X$, а также элементы $V(x)$ при всех $V \in G_1$ полунепрерывны снизу (сверху) и удовлетворяют условию (A_1) и, кроме того, $K[x]$ является компактом. Тогда $K[x]$ содержит константу $\overline{x}$ и $\overline{x} \geqslant 0$, если $x(t) \geqslant 0$ при всех $t \in S$. Кроме того, если x и $V(x)$ для $V \in G_1$ полунепрерывны снизу, то $\overline{x} > 0$ для случая $x(t) \geqslant 0$ при $t \in S$ и $x \neq 0$.

Будем говорить, что элемент x удовлетворяет условиям (B_1), (B_2), (B_3), (B_4), если, соответственно,

(B_1). Для любого $T \in G$ и $\varepsilon > 0$ имеется такое $\delta > 0$, что если $V \in G_1$ и $O[V(x)] < \delta$, то для $t \in S$ найдется такое $t' \in S$, что $|[VT(x)](t) - [V(x)](t')| < \varepsilon$.

(B_2). Для любых $\varepsilon > 0$, $V \in G_1$ и $W \in G_1$ имеются $V' \in G_1$, $W' \in G_1$ такие, что $\|V'V(x) - W'W(x)\| < \varepsilon$.

(B_3). Для любых $\varepsilon > 0$, $V \in G_1$, $W \in G_1$ имеются $V' \in G_1$, $W' \in G_1$ и $t_1 \in S$, $t_2 \in S$ такие, что

$$|[V'V(x)](t_1) - [W'W(x)](t_2)| < \varepsilon.$$

(B_4). Для каждого $T \in G$ и $W \in G_1$ и каждого $\varepsilon > 0$ имеется такое $U \in G_1$, что

$$\|WT(x) - UW(x)\| < \varepsilon.$$

Условия B нужны, чтобы обеспечить наличие в $K[x]$ не более одной константы. Основная теорема статьи формулируется так:

Теорема 6.7. Пусть для любого $x \in F$ выполняются условия предыдущих двух теорем, а также по крайней мере одно из условий $B_1 - B_4$. Тогда существует такой элемент $x^* \in X^*$, что $x^*(e) = 1$, $x^*(Tx) = x^*(x)$ для $T \in G$ и $x^*(x) \geqslant 0$, если $x \in F$ и $x(t) \geqslant 0$ при всех $t \in S$. Кроме того, если $x \in F$ и полунепрерывна снизу, $x(t) \geqslant 0$ при $t \in S$ и $x \neq 0$, то $x^*(x) > 0$.

Условия (B_i) в этой теореме можно заменить требованием коммутативности полугруппы G. Исходным пунктом статьи служит анализ идеи конструкции инвариантного среднего Неймана.

Д. П. Мильман

3838. **Преобразования Фурье класса $\mathfrak{L}_p$.** Хьюитт (Fourier transforms of the class $\mathfrak{L}_p$. Hewitt Edwin), Arkiv. mat., 1954, 2, № 6, 571—574 (англ.)

Пусть G — локально компактная коммутативная группа, G^* — группа ее характеров, $\mathfrak{L}_p(G)$ и $\mathfrak{L}_{p'}(G^*)$ — пространства функций на G и G^* соответственно, суммируемых относительно мер Хаара со степенями p и p' ($p + p' = pp'$). Вейль (Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его применения, М., Изд-во иностр. лит-ры, 1950, 132—133) получил обобщение теоремы Юнга — Хаусдорфа о рядах Фурье на группы: при $1 < p \leqslant 2$ преобразование Фурье по характерам группы G переводит $\mathfrak{L}_p(G)$ в $\mathfrak{L}_{p'}(G^*)$ без увеличения нормы. В случае обычных рядов и интегралов Фурье известно, что при $p < 2$ Фурье-образ пространства $\mathfrak{L}_p(G)$ не заполняет всего $\mathfrak{L}_{p'}(G^*)$. Автор при помощи теоремы Банаха о непрерывности обратного оператора устанавливает этот факт в несколько более сильной формулировке для любой локально компактной коммутативной бесконечной группы G.

Ю. М. Березанский

3839. **Структура спектра положительных неоднородных операторов.** Красносельский М. А., Ладыженский Л. А., Тр. Моск. матем. о-ва, 1954, 3, 321—346

Некоторые из предложений, установленных П. С. Урысоном для одного типа нелинейных интегральных операторов (Матем. сб., 1923, **31**; 2, 236—254), переносятся на более общие операторы, действующие в банаховых пространствах.

В отличие от метода Урысона (метод последовательных приближений при подходящем выборе начального приближения), авторы пользуются развитой М. Г. Крейном теорией конусов в банаховых пространствах (Крейн М. Г., Рутман М. А., Успехи матем. наук, 1948, **3**, № 1, 3—95).

Пусть K — конус банахова пространства E. Всякий элемент K, отличный от нулевого θ, называется положительным элементом пространства E. Если $x, y \in E$, а $x - y \in K$, то пишут $x \geqslant y$ или $y \leqslant x$. Оператор A, действующий в некоторой части E, называется положительным, если он преобразует положительные элементы в положительные. Линейный положительный оператор A называется u_0-ограниченным, если существует такой отличный от θ элемент $u_0 \in K$, что для любого $\varphi \in K$ ($\varphi \neq \theta$) найдутся положительные числа α, β и натуральное число p такие, что $\alpha u_0 \leqslant A^p \varphi \leqslant \beta u_0$. Положительный оператор A авторы называют u_0-вогнутым, если:

1. Из $x \leqslant y$ следует $Ax \leqslant Ay$.

2. Найдется такой элемент $u_0 \in K$, что для любого $\varphi \in K$ ($\varphi \neq \theta$) $\mu u_0 \leqslant A\varphi \leqslant \nu u_0$, где положительные числа μ и ν зависят от φ.

3. Для каждого элемента $\varphi \geqslant \gamma u_0$ ($\gamma > 0$) и всякого t из произвольного сегмента $[a, b]$ ($0 < a < b < 1$) справедливо соотношение $A(t\varphi) \geqslant (1 + \eta) tA\varphi$, где положительное число η зависит от φ, a, b.

Множество собственных значений, отвечающих положительным собственным элементам оператора A, называется позитивным спектром оператора A. В работе доказаны следующие предложения.

Теоремы 3, 4 и 5. Пусть положительный оператор A удовлетворяет одному из условий

$$P\varphi \geqslant A\varphi \geqslant Q\varphi \text{ [или } P\varphi \leqslant A\varphi \leqslant Q\varphi] \quad (\varphi \in K),$$

где P, Q — некоторые линейные положительные u_0-ограниченные операторы и λ_P, λ_Q — положительные собственные числа соответственно операторов P и Q, которым отвечают положительные собственные элементы. Тогда: если P и Q вполне непрерывны, то позитивный спектр оператора A заключен в сегменте $[\lambda_Q, \lambda_P]$; если оператор A вполне непрерывен, P есть производная Фреше оператора A в точке θ и $\lim_{\|\varphi\| \to \infty} \{\|A\varphi - Q\varphi\| / \|\varphi\|\} = 0$, то позитивный спектр оператора A полностью заполняет интервал (λ_Q, λ_P) [или (λ_P, λ_Q)].

Теорема 6. Пусть A — u_0-вогнутый оператор и $A\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$, $A\varphi_2 = \lambda_2\varphi_2$, где $\varphi_1, \varphi_2 \in K$, $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. Тогда $\varphi_1 \geqslant \varphi_2$.

Теорема 7. Пусть A — u_0-вогнутый оператор. Тогда уравнение $A\varphi = \lambda_0\varphi$ ($\lambda_0 > 0$) не может иметь в конусе более одного, отличного от θ, решения.

В теоремах 8 и 9 речь идет о наличии непрерывных ветвей у оператора A. Отметим еще, что для удобства читателя в работе приведено доказательство известных предложений теории конусов и некоторых предложений, опубликованных ранее одним из авторов без доказательства (Красносельский М. А., Докл. АН СССР, 1950, **74**, № 2, 177—179; 1951, **76**, № 4, 481—484).

М. М. Вайнберг

3840. Формула обращения преобразования Лапласа и полугруппы линейных операторов. Филлипс (An inversion formula for Laplace transforms and semi-groups of linear operators. Phillips R. S.), Ann. Math., 1954, **59**, № 2, 325—356 (англ.)

Автор продолжает исследования Хилла (Функциональный анализ и полугруппы, М., Изд-во иностр. л-ры, 1951; Hille E., Kgl. Fysiografiska Sällskapets I Lund Förhandlingar, 1951, **21**, 1—13), Иосида (Yosida K., J. Math. Soc. Japan, 1948, **1**, 15—21) и собственные (Trans. Amer. Math. Soc., 1952, **74**, 199—221), выясняя условия, при которых замкнутый линейный оператор A в комплексном банаховом пространстве $\mathfrak{X}$ является производящим для некоторой полугруппы ограниченных линейных операторов $T(s)$, обладающей как функция параметра s теми или иными свойствами. Автор относит сильно измеримую полугруппу $T(s)$ к классу (0, A) или (0, C) соответственно (1, A) или (1, C)), если $\int_0^1 \|T(\sigma)x\|\, d\sigma < \infty$ при любом $x \in \mathfrak{X}$ (соответственно $\int_0^1 \|T(\sigma)\|\, d\sigma < \infty$) и $T(s)$ сильно суммируемо в смысле Абеля или в смысле Чезаро в точке $s = 0$ к тождественному оператору. Сильный предел tA при $t \to 0$ оператора $t^{-1}[T(t) - I]$ для полугруппы $T(s)$ класса (0, A), вообще говоря, незамкнут; его наименьшее замкнутое расширение $\bar{A}$ называется полным (complete) бесконечно малым производящим оператором этой полугруппы. Для операторов класса (0, C) и только для них $\bar{A} = A$.

Основываясь на некоторой формуле обращения преобразования Лапласа, выведенной в п. 2, автор, в частности, показывает (п. 4), что замкнутый линейный оператор U является полным бесконечно малым производящим оператором некоторой полугруппы $T(s)$ класса (1, A), такой, что $\int_0^\infty \|T(\sigma)\|\, d\sigma < \infty$, тогда и только тогда, когда U удовлетворяет условиям 1, 2 и любому из условий 3(a) — 3(d): 1. $\mathfrak{D}(U)$ плотно в $\mathfrak{X}$. 2. $\lambda \|R(\lambda; U)\| \leqslant M$ при больших вещественных λ. 3(a). $\|R^{(n)}(\lambda; U)\| \leqslant \int_0^\infty \exp(-\lambda\sigma)\sigma^n \varphi(\sigma)\, d\sigma$ для $\lambda > 0$ и целых $n \geqslant 0$, где $\varphi(s)$ — какая-нибудь неубывающая измеримая функция с $\int_0^\infty \varphi(\sigma) d\sigma < \infty$; (b) существует такое $M > 0$, что $\int_0^\infty \|R^{(n)}(\lambda; U)\| \lambda^{n-1} d\lambda \leqslant (n-1)! M$ для целых $n \geqslant 1$; (c) $\|R^{(n)}(\lambda; U)\| \leqslant \int_0^\infty \exp(-\lambda\sigma)\sigma^n da(\sigma)$ для $\lambda > 0$ и целых $n \geqslant 0$, где $a(s)$ — какая-нибудь ограниченная неубывающая функция; (d) существует такое $M > 0$, что $\int_0^\infty \|\exp\{\sigma[\lambda^2 R(\lambda; U) - \lambda I]\}\| d\sigma \leqslant M$.

Далее (в п. 5) автор устанавливает, что если $\bar{A}$ — полный бесконечно малый производящий оператор полугруппы $T(s)$ класса (1, A) или (1, C), а B — ограниченный линейный оператор, то $\bar{A} + B$ является полным бесконечно малым производящим оператором некоторой полугруппы $S(s)$ того же класса; для $S(s)$ указывается аналитическое выражение. Д. А. Васильков

3841. Заметка об абстрактной задаче Коши. Филлипс (A note on the abstract Cauchy problem. Phillips R. S.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A, 1954, **40**, № 4, 244—248 (англ.)

Абстрактная задача Коши (ACP_1) ставится автором так: для заданного линейного оператора U в комплексном банаховом пространстве $\mathfrak{X}$ и для заданного $y_0 \in \mathfrak{X}$ найти функцию $y(t) = y(t; y_0)$, абсолютно сильно непрерывную и непрерывно дифференцируемую в любом конечном интервале на $[0, \infty)$, такую, что $y(t) \in \mathfrak{D}(U)$, $U[y(t)] = y'(t)$ при $t > 0$ и $\lim_{t \to 0} y(t; y_0) = y_0$. Вариант ($ACP_2$) этой задачи предусматривает непрерывность производной лишь при $t > 0$. Автор устанавливает условия, обеспечивающие, в случае однозначной разрешимости задачи (ACP_1) или (ACP_2) для любого $y_0 \in \mathfrak{D}(U)$, представление решения в виде $y(t; y_0) = S(t) y_0$, где $[S(t); t > 0]$ — сильно непрерывная полугруппа ограниченных линейных операторов, для которой U служит производящим оператором: замкнутый оператор U со

сюду плотной областью $\mathfrak{D}(U)$ в случае (ACP_1) должен иметь непустое резольвентное множество; в случае (ACP_2) норма резольвенты $R(\lambda; U)$ должна быть $o(\lambda^{-1})$ при $\lambda \to \infty$. Д. А. Васильков

3842. О гиперболоидах и условном экстремуме некоторых функционалов в гильбертовом пространстве. Вайнберг М. М., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 2/60, 105—112

Пусть B — ограниченный самосопряженный оператор в вещественном гильбертовом пространстве H. Предполагается, что положительному спектру оператора B соответствует конечномерное инвариантное подпространство H_1; $H_2 = H \ominus H_1$. P_1, P_2 — операторы ортогонального проектирования, соответственно на H_1, H_2. V — совокупность тех x, для которых $\| P_1 x \| \geqslant \| P_2 x \|$.

Рассматривается слабо непрерывный функционал $f(x)$, определенный в H и имеющий градиент $F(x)$. Предполагая, что $(F(x), x) > 0$ при $\| x \| > 0$, причем $\lim_{\| x \| \to \infty} (F(x), x) = +\infty$ (при $x \in BV$), автор доказывает (теорема 1), что функционал $f(Bx)$ на каждом гиперболоиде $\| P_1 x \|^2 - \| P_2 x \|^2 = c$ принимает свое минимальное значение. Судя по доказательству, рассматривается только случай $c > 0$ (что в формулировке теоремы не оговорено).

Во второй теореме автор предполагает, что

$$(F(x), x) \geqslant \gamma(\| x \|) \qquad (x \in BV,\ 0 \leqslant \| x \| \leqslant a),$$

где $\gamma(u)$ — возрастающая функция на $[0, a]$, $\gamma(0) = 0$. Доказывается, что существует такое $r > 0$, что на всяком гиперболоиде $\| P_1 x \|^2 - \| P_2 x \|^2 = c \leqslant r$ найдется замкнутая часть $\overline{U}$, относительно которой функционал $f(Bx)$ достигает своей нижней грани в некоторой внутренней точке $\overline{U}$. М. А. Красносельский

3843. Об одной обратной задаче теории операторов. Лившиц М. С., Докл. АН СССР, 1954, **97**, № 3, 399—402

Рассматривается эрмитов оператор H_p в l_2, удовлетворяющий условиям:

I. Для всех $p > 0$ оператор $H_p = H_0 + cpJ_0$, где H_0 — ограниченный эрмитов оператор, c — положительная константа, а J_0 — одномерный оператор, проектирующий всякий вектор из l_2 на орт $\psi_0 = (1, 0, 0, \ldots)$: $J_0 f = (f, \psi_0)\psi_0$ $(f \in l_2)$.

II. Для каждого $p > 0$ оператор H_p имеет одно и только одно собственное число $E_p = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}$.

Доказана теорема: Если H_p $(p > 0)$ — матрица, удовлетворяющая условиям I и II, то унитарным преобразованием (не зависящим от p) ее можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} mc^2 T + cpJ_0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

где C — эрмитова матрица, не зависящая от p, а T (называемая автором матрицей Чебышева) имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1/2} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \sqrt{1/2} & 0 & 1/2 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Спектр матрицы T непрерывен и заполняет интервал $[-1, 1]$.

Показано также, что при дополнительном требовании простоты спектра H_p $(-\infty < p < +\infty)$ замкнутая линейная оболочка $\mathfrak{H}_0$ векторов $H_0^n \psi_0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ совпадает со всем l_2, т. е. матрица H_0 унитарно эквивалентна матрице mc^2T. Последнее в начале статьи сформулировано неточно: в требовании простоты спектра H_p опущено условие $-\infty < p < +\infty$, введенное автором в конце статьи. И. С. Иохвидов

3844. Об одной обратной задаче теории операторов. II. Лившиц М. С., Докл. АН СССР, 1954, 97, № 4, 589—592

Семейство операторов $H_p = A + pB$, определенных в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, называется простым, если не существует общего для всех H_p инвариантного подпространства, на котором все H_p индуцировали бы один и тот же оператор.

Пусть A — ограниченный, а B — вполне непрерывный эрмитовы операторы, ψ_j $(j = 1, 2, \ldots, r;\ r \leqslant \infty)$ — полная ортонормированная система собственных векторов оператора B, а b_j $(b_j \neq 0,\ j = 1, 2, \ldots, r)$ — соответствующие собственные числа. В этом случае простота семейства $H_p = A + pB$ равносильна совпадению замкнутой линейной оболочки элементов вида $A^n \psi_j$ $(n = 0, 1, 2, \ldots;\ j = 1, 2, \ldots, r)$ со всем $\mathfrak{H}$.

Для матриц r-го порядка $\beta = \| b_j \delta_{jk} \|$ и

$$\Phi_p(\lambda) = \| (H_p - \lambda I)^{-1} \psi_j,\ \psi_k \| \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, r)$$

устанавливается формула $\Phi_0(\lambda) = \Phi_p(\lambda)[I + p\beta\Phi_0(\lambda)]$, с помощью которой доказана лемма: Пусть $H_p = A + pB$ — простое семейство операторов, где A — ограниченный, а B — вполне непрерывный эрмитовы операторы. Число λ_p $(|\lambda_p| \geqslant \| A \|)$ принадлежит спектру (дискретному) оператора H_p тогда и только тогда, когда $-1/p$ является собственным числом матрицы $\beta\Phi_0(\lambda_p)$.

Отсюда получается следующее обобщение теоремы автора из первой части реферируемой работы (см. реф. 3843): Если оператор H_p удовлетворяет тем же условиям, что и в лемме, и для каждого $p > 0$ имеет одно и только одно собственное число $E_p = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}$, то матрицу H_p можно унитарным преобразованием (не зависящим от p) привести к виду

$$H_p = \begin{pmatrix} T_p & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & T_p & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & T_p & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & C \end{pmatrix},$$

где $T_p = mc^2T + cpJ_0$ (определения T и J_0 см. реф. 3843), а C — постоянная эрмитова матрица.

Если же для каждого $p > 0$ допустить существование двух собственных чисел $\pm c\sqrt{m^2c^2 + p^2}$ оператора H_p, то H_p можно реализовать в виде матрицы второго порядка:

$$H_p = mc^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & p \\ p & 0 \end{pmatrix}.$$

И. С. Иохвидов

3845. О расширенной области сингулярности оператора $T_\lambda = E - \lambda A$. Крачковский С. Н., Докл. АН СССР, 1954, **96**, № 6, 1101—1104

Рассматривается оператор $T_\lambda = E - \lambda A$, где A — линейный ограниченный оператор, отображающий банахово пространство R в себя, E — тождественный оператор и λ — комплексный параметр. Через Φ'_A обозначается множество таких λ, для которых: 1) оператор T_λ нормально разрешим; 2) уравнения $T_\lambda x = 0$ и

$T_\lambda^* X = 0, x \in R, X \in R^*$, не имеют одновременно бесконечного числа линейно независимых решений. Случай, когда оба эти уравнения имеют конечное число линейно независимых решений, изучен автором раньше (РЖМат, 1954, 2228).

Пусть $\lambda_0 \in \Phi_A'$. Для определенности допускается, что уравнение $T_{\lambda_0} x = 0$ имеет конечное число линейно независимых решений. Тогда все линейно независимые нуль-элементы оператора A, соответствующие значению λ_0, могут быть расположены в таблицу, состоящую из p конечных и s бесконечных строк, так же как в предыдущей работе автора (РЖМат, 1954, 2228).

Доказывается, что число конечных строк и число элементов в каждой такой строке в таблице нуль-элементов сопряженного оператора A^* равны соответственно числу конечных строк и числу элементов в каждой из них в таблице нуль-элементов оператора A.

Устанавливается, что множество Φ_A' открыто в плоскости λ и получается из обобщенной области Фредгольма оператора A (РЖМат, 1954, 2228) путем добавления к ней связных компонент, в каждой из которых числа линейно независимых решений уравнений $T_\lambda x = 0$ и $T_\lambda^* X = 0$, равные соответственно s и r, постоянны всюду, за исключением, быть может, изолированного множества точек (в которых $p \neq 0$, причем или s или r равно ∞).

Через M_A' обозначается совокупность тех компонент области Φ_A', в которых $s = 0$. Пусть $\lambda_0 \in M_A'$ и соответствующее ей число $p \neq 0$. Дается представление оператора A в виде суммы $A = A_0 + A_1 (A_0 A_1 = A_1 A_0 = 0)$, где A_0 — конечномерный оператор, отображающий R на подпространство, базис которого составляют линейно независимые нуль-элементы оператора A в точке λ_0, составляющие p конечных строк, а оператор A_1 — такой, что $(E - \mu A_1)^{-1}$ существует как в самой точке λ_0, так и в ее окрестности. С помощью указанного разложения исследуется резольвента Γ_λ оператора A в окрестности точки λ_0, имеющая вид

$$\Gamma_\lambda = \Gamma_\lambda^0 + \Gamma_\lambda' \quad (\Gamma_\lambda = A T_\lambda^{-1}, \quad \Gamma_\lambda^0 = A_0 (E - \lambda A_0)^{-1},$$

$$\Gamma_\lambda' = A_1 (E - \lambda A_1)^{-1}),$$

и дается явная формула для Γ_λ^0. Д. Ф. Харазов

3846. Об аналитических нормальных операторах. Джеймисон (On analytic normal operators. Jamison S. L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 2, 288—290 (англ.)

Доказываются следующие теоремы:

1. Пусть $A(z)$ и $B(z)$ — регулярные в круге $|z| < \rho$ семейства ограниченных, определенных всюду в гильбертовом пространстве H, операторов, для которых имеют место разложения

$$A(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots$$
$$B(z) = B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots \qquad (|z| < \rho).$$

В таком случае $A(z) B^*(z) = B^*(z) A(z)$ при $|z| < \rho$ тогда и только тогда, когда $A_n B_m^* = B_m^* A_n$ $(m, n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Отсюда, в частности, следует, что операторы семейства $N(z)$, регулярного в круге $|z| < \rho$, будут нормальными при $|z| < \rho$ тогда и только тогда, когда N_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ нормальны и $N_n N_m = N_m N_n (n, m = 0, 1, 2, \ldots)$, где N_k — коэффициенты в разложении $N(z) = N_0 + N_1 z + N_2 z^2 + \ldots$ $(|z| < \rho)$.

2. Если $N(z)$ — регулярное в круге $|z| < \rho$ семейство нормальных операторов, то существуют самосопряженный оператор A и функция $F(z; \lambda)$ такие, что:

1) $F(z, \lambda)$ — аналитическая функция от z при каждом фиксированном λ;

2) $F(z, \lambda)$ A-интегрируема относительно λ при всяком фиксированном z, $|z| < \rho$;

3) $N(z) = F(z, A)$. Л. С. Дашниц

3847. Заметка о полугруппах неограниченных самосопряженных операторов. Девинац (A note on semi-groups of unbounded self-adjoint operators. Devinatz A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 1, 101—102 (англ.)

Пусть T_x $(x > 0)$ — полугруппа самосопряженных, вообще говоря, неограниченных операторов, действующих в некотором гильбертовом пространстве, т. е. $T_{x_1} T_{x_2} = T_{x_1 + x_2}$ $(x_1, x_2 > 0)$. Предположим, что для каждого $f \in \bigcap_{x>0} \mathfrak{D}(T_x)$ $(\mathfrak{D}(T_x)$ — область определения $T_x)$ функция $(T_x f, f)$ ограничена или измерима на некотором интервале. Тогда существует единственное разложение единицы E_λ такое, что $E_\lambda = 0$ при $\lambda < 0$ и

$$T_x = \int_0^\infty \lambda^x dE_\lambda.$$

Эта теорема в случае ограниченных операторов T_x была независимо доказана С.-Надем и Хиллом (см., например, Рисс Ф., С.-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, М., Изд-во иностр. лит-ры, 1954, гл. 10, § 2). Доказательство автора является незначительным уточнением рассуждений С.-Надя.

Ю. М. Березанский

3848. О линейных операторах в прямом произведении гильбертовых пространств. Сульдин А. В., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1954, 114, № 2, 169—172

Вводится прямое произведение $H = H_1 \times H_2$ двух гильбертовых пространств H_1 и H_2 как пополнение линейной оболочки L всех формальных произведений ef $(e \in H_1, f \in H_2)$. Линейные операции в L определяются, как обычно для пар, а скалярное произведение задается формулой

$$(e_1 f_1, e_2 f_2) = (e_1, e_2) \cdot (f_1, f_2).$$

Линейный оператор A с областью определения $\Omega_A \subset H_1$ распространяется на элементы H по формуле $A(ef) = (Ae) f$, если $e \in \Omega_A$, с сохранением линейности.

Если A замкнут как оператор в H_1, то он допускает замыкание и как оператор в H. Если в H_1 оператор A ограничен, то он ограничен и в H.

Устанавливаются предложения:

1) Если A — линейный ограниченный оператор в H, полученный распространением некоторого оператора из H_1, а B — линейный замкнутый оператор в H, полученный распространением некоторого оператора из H_2, то для всех x из H, для которых $x \in \Omega_B$, имеют место соотношения

$$Ax \in \Omega_B, \quad ABx = BAx.$$

2) Если B — такой же оператор, как в 1), а от A требуется только замкнутость и существование точки регулярного типа, то для всех x из H, для которых $x \in \Omega_A$, $x \in \Omega_B$, $Ax \in \Omega_B$, имеем:

$$Bx \in \Omega_A, \quad ABx = BAx.$$

В качестве примеров рассматриваются операторы в пространстве H функций двух переменных, определенных в прямоугольнике $Q\{a \leqslant x \leqslant b;\ c \leqslant y \leqslant d\}$, со скалярным произведением

$$(f, \varphi) = \iint_Q f(x, y) \overline{\varphi(x, y)}\, dx\, dy.$$

Для абсолютно непрерывных по x функций f, для которых $f_x \in H$, из 1) получается равенство $\partial \{\int_a^b f(x, y)\, dy\} / \partial x =$

$= \int_a^b \{\partial f(x, y) / \partial x\}\, dy$, понимаемое в смысле метрики H. Если $f \in H$ и $f(a, y) = f(b, y) = 0$, а f_x, f_y, f_{yx} существуют и принадлежат H, то на основании 2) $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ (в смысле метрики H, а в случае непрерывности f_{xy} и f_{yx} — и в обычном смысле). Утверждается (без доказательства), что от граничных условий можно освободиться. И. С. Иохвидов

3849. **Исправление к моей статье «Кольца операторов и их следы».** Орихара (Correction to my paper «Rings of operators and their traces». Orihara Masae), Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Univ., 1953, A8, № 1, 89—91 (англ.)

Приводится исправленное доказательство одной из лемм указанной в заголовке статьи автора (тот же журнал 5, 107—138), а также отмечаются некоторые имеющиеся в этой статье опечатки. Б. З. Вулих

3850. **Общие бесконечные линейные группы.** Кейдисон (Infinite general linear groups. Kadison Richard V.), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, 76, № 1, 66—91 (англ.)

Рассматривается группа M_g всех операторов с ограниченным обратным, принадлежащих данному фактору M. Применяя результаты своей предыдущей статьи (Trans. Amer. Math. Soc., 1952, 72, 385—399) и понятие детерминанта Δ в факторах конечного класса (Fuglede B., Kadison R., Ann. Math., 1952, 55, 520—530), автор получает следующие результаты.

1. Если M — фактор конечного класса, то все равномерно замкнутые нецентральные нормальные делители группы M_g суть полные прообразы при отображении $A \to \Delta(A)$ замкнутых подгрупп области изменения детерминанта Δ.

Кроме того, группа M_{g_1} всех операторов из M_g с детерминантами, равными единице, имеет своими единственными замкнутыми нормальными делителями замкнутые центральные (скалярные) подгруппы.

2. Пусть $M_{g'f}$ — совокупность всех операторов из M_g, являющихся скалярами на ортогональном дополнении некоторого подпространства, конечной относительной размерности, а M_{gf} — замыкание $M_{g'f}$ в равномерной топологии. Тогда M_{gf} есть замкнутый нормальный делитель группы M_g и состоит из тех и только тех операторов A из M_g, в полярном разложении $A = UH$ которых (U — унитарный, H — положительно определенный эрмитов оператор) операторы U и H имеют не более одного центра бесконечной плотности, т. е. такой точки спектра, что оператор проектирования, отвечающий ее окрестности, имеет бесконечную относительную размерность.

В случае фактора M конечного класса $M_{gf} = M_g$; если M — фактор класса III, то $M_{gf} = \{\lambda I\}$; если же M — фактор классов I_∞ или II_∞, то M_{gf} — собственный нецентральный нормальный делитель группы M_g.

3. Если M — фактор класса III, то M_g не имеет собственных нецентральных равномерно замкнутых нормальных делителей.

4. Пусть $M_{gf(1)}$ есть совокупность всех операторов из M_g, являющихся пределами в равномерной топологии операторов, равных единичному оператору на подпространстве, дополнение которого имеет конечную относительную размерность. Если M — фактор бесконечного класса, то $M_{gf(1)}$ — топологически простой нормальный делитель группы M, и всякий другой равномерно замкнутый собственный нецентральный нормальный делитель G группы M_g содержит $M_{gf(1)}$, причем всякий нормальный оператор из G принадлежит $M_{gf(1)}$.

5. Если M — фактор класса I_∞, то всякий замкнутый нецентральный нормальный делитель группы M_g есть прямая сумма группы $M_{gf(1)}$ и некоторой подгруппы группы скаляров.

Автор указывает, что перенесение этого последнего результата на факторы класса II_∞ упирается в необходимость разработки бесконечномерной геометрии для факторов класса II_∞. М. А. Наймарк

3851. **О функциях, являющихся преобразованиями Фурье.** Эдуардс (On functions which are Fourier transforms. Edwards R. E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 1, 71—78 (англ.)

Пусть G — коммутативная локально компактная группа, G^* — группа ее характеров и $V(G^*)$ — коммутативное нормированное кольцо абсолютно аддитивных мер ограниченной вариации на G^* со сверткой в качестве умножения и с нормой, равной вариации меры. Совокупность суммируемых относительно меры Хаара функций на G^* обозначим $L^1(G^*)$; $L^1(G^*)$ можно рассматривать как подкольцо (и даже идеал) кольца $V(G^*)$. Сегал показал (Segal I. E., Acta Sci. Math. Szeged, 1950, 12, 157—161), что если каждая непрерывная функция на G, стремящаяся к нулю на ∞, является преобразованием Фурье некоторой функции из $L^1(G^*)$, то G конечна. Аналогичное утверждение Хьюитт (РЖМат, 1954, 2222) получил для случая равномерно почти периодических функций на G и преобразований Фурье — Стилтьеса мер из $V(G^*)$. Автор, используя некоторые результаты И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка (Матем. сб., 1943, 12, № 2, 197—217), при помощи простых рассуждений устанавливает более общий факт: пусть R — коммутативное нормированное симметричное кольцо такое, что $\| f^2 \| \geqslant K \| f \|^2$ ($f \in R$), где K — некоторая константа. Если R алгебраически изоморфно подкольцу из $V(G^*)$, то R конечномерно. Отсюда очевидным образом вытекают упомянутые результаты Сегала и Хьюитта, а также может быть получен ряд близких фактов.

Ю. М. Березанский

3852. **Об интегрировании дифференциальных уравнений Колмогорова.** Хилле (On the integration of Kolmogoroff's differential equations. Hille Einar), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A, 1954, 40, № 1, 20—25 (англ.)

Рассматривается однородный во времени вероятностный процесс со счетным множеством состояний и система дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют вероятности перехода,

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} p_{kj}(t), \quad i, j = 1, 2, \ldots,$$

где $a_{ij} \geqslant 0$ $(i \neq j)$, $a_{ii} \leqslant 0$, $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = 0$. В алгебре $\mathfrak{M}$ матриц $B = (b_{ij})$ с нормой $\| B \| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} | b_{ij} | < \infty$ матрицы перехода $P(t) = (p_{ij}(t))$ образуют полугруппу; в то же время $P(t)$ образуют полугруппу операторов в $\mathfrak{M}$: $P(t)[B] = P(t)B$. Оператор $A[B] = AB$ в $\mathfrak{M}$, определяемый матрицей $A = (a_{ij})$, вообще говоря, неограничен.

Для того случая, когда матрица A треугольная ($a_{ij} = 0$ при $j > i$), автор показывает, что существует оператор $A_0 \subset A$ такой, что задача Коши

$$Y'(t) = A[Y(t)], \quad Y(t) \in \mathfrak{D}[A], \quad t > 0,$$

$$\lim_{t \to +0} \| Y(t) - B \| = 0 \quad (B \in \mathfrak{D}[A_0])$$

имеет единственное решение $Y(t) = P(t)[B]$, где $P(t)$ — (сильно непрерывная при $t \geqslant 0$) полугруппа матриц перехода, для которой A_0 служит производящим оператором. Область определения $\mathfrak{D}[A_0]$ оператора A_0 состоит из

тех матриц B, для которых $A[B] \in \mathfrak{D}[A]$. Решая систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{i} (\lambda\delta_{ik} - a_{ik})\, r_{kj}(\lambda) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots,$$

автор строит резольвенту $R(\lambda; A) = (r_{ij}(\lambda))$ оператора A, после чего находит $P(t)[B]$ с помощью обращения преобразования Лапласа. $P(t)$ удовлетворяет также уравнению $P'(t) = P(t)A$. Приводится пример, когда оператор $[B]A = BA$ по своим свойствам существенно отличается от оператора $A[B] = AB$. Д. А. Васильков

3853. Вариационный принцип для собственных функций. Биденхарн, Блатт (A variation principle for eigenfunctions, Biedenharn L. C., Blatt J. M.), Phys. Rev., 1954, **93**, № 1, 230—232 (англ.)

Изучается уравнение

$$H\psi = \lambda\psi, \qquad (1)$$

где H — эрмитова матрица порядка N. Пусть уравнение (1) имеет простые собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ и пусть $\psi_1, \ldots, \psi_N$ — соответствующие нормированные собственные функции. Пусть $\varphi_k = (1 + Q)\psi_k$, где Q — линейный оператор, малый в том смысле, что можно пренебрегать квадратом Q.

В работе доказывается следующая формула:

$$\psi_k = \varphi_k - \sum_{k' \neq k} \left[\frac{(\varphi_{k'}, H\varphi_k) - \omega_k(\varphi_{k'}, \varphi_k)}{\omega_{k'} - \omega_k} \right] \varphi_{k'} + O(Q^2), \qquad (2)$$

где $\omega_k = (\varphi_k, H\varphi_k)$.

Формула (2) обобщается на уравнение $A\psi = \lambda B\psi$, где A и B — эрмитовы матрицы (B не положительно определена), а также на случай кратных собственных значений. Б. М. Левитан

3854. Частично упорядоченные псевдонормированные пространства. Кристеску (Spaţii parţial ordonate pseudonormate. Cristescu Romulus), Comun. Acad. R. P. Române, 1954, **4**, № 1—2, 15—20 (рум.; резюме русс., франц.)

Вводится класс линейных полуупорядоченных пространств, называемых KP-пространствами, представляющих обобщение понятия KB-пространства (Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.—Л., Гостехиздат, 1950). Определение KP-пространства отличается от определения KB-пространства тем, что в KP-пространстве вместо одной нормы постулируется наличие направленного множества некоторых псевдонорм. Отмечаются некоторые элементарные свойства KP-пространств и приводится несколько примеров множеств операторов, функций и последовательностей, которые оказываются KP-пространствами, не будучи в то же время KB-пространствами. Б. З. Вулих

3855. Векторные и тензорные функциональные операторы, ковариантные относительно некоторой группы. Фантапье (Gli operatori funzionali vettoriali e tensoriali, covarianti rispetto a un gruppo qualunque. Fantappiè Luigi), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 99—104 (итал.)

В предыдущих статьях автора (Rend. Lincei, 1952, **12**, 1 sem.) было доказано, что для наблюдаемости физической величины изображающий ее линейный оператор K должен иметь вид $K\varphi(x) = F_t[T_t\varphi(x)]$, где T_t — преобразование группы Ли G^r, с помощью которой происходит переход от одной системы отнесения к другой, а F_t — функционал, действующий лишь относительно переменных t. В частности, величина скалярна, если для любой функции положения $F_t[T_{t'} \times \varphi(x)] = F_t[T_t \times \varphi(x)]$, где $T_{t'} = T_a T_t T_a^{-1}$. Иными словами, должна иметь место инвариантность относительно присоединенной группы Ли. Если параметры группы G^r канонические, то переход от преобразования T_t к преобразованию $T_{t'}$ описывается линейным преобразованием $t'_j = \sum_{h=1}^{r} c_{jh}(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_r)\, t_h$. Совокупность операторов $K_1, K_2, \ldots, K_r$ изображает ковариантную относительно G^r величину, если при преобразовании координат выполняется равенство

$$\overline{K}_j\varphi(x) = \sum_{h=1}^{r} c_{hj}(-\alpha_1, \ldots, -\alpha_r)\, K_h\varphi(x).$$

Аналогично определяются контравариантные величины. Указываются методы построения ковариантных и контравариантных величин при помощи операций дифференцирования и умножения на независимые переменные. Н. Я. Виленкин

См. также: 3635, 3642 Д, 3684, 3703, 3732, 3733, 3752, 3753, 3756, 3761 Д, 3763, 3764, 3765, 3766, 3773 К, 3774 К, 3797, 3798, 3857

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

3856. Последовательность сумм независимых случайных величин. Каллианпур, Роббинс (The sequence of sums of independent random variables. Kallianpur G., Robbins H.), Duke Math. J., 1954, **21**, № 2, 285—307 (англ.)

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с одинаковыми распределениями и $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Пусть $h(s)$ — интегрируемая по Риману и равная нулю вне некоторого отрезка функция с $\overline{h} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)\, ds \neq 0$. Приводятся интересные, но несколько разрозненные результаты о поведении величин

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} h(S_i)$$

при $n \to \infty$. Примеры:

Если $P\{S_n < scn^{1/\alpha}\} \to G_\alpha(s)$, где $G_\alpha(s)$ — функция распределения устойчивого симметричного закона с параметром $1 < \alpha < 2$, и если слагаемые X_i имеют плотность вероятности $f(t)$, для которой при некотором $p > 1$ интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p\, dt$ сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{\alpha c \sin(\pi/\alpha)}{\overline{h} n^{1-(1/\alpha)}}\, H_n < x \right\} = \int_0^x g(y; \alpha)\, dy,$$

где

$$g(y; \alpha) = \frac{1}{\pi\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \sin(k\pi\beta)\, \Gamma(1 + k\beta)\, y^{k-1}, \qquad y \geqslant 0$$

$$g(y; \alpha) = 0, \qquad y < 0$$

и $\beta = 1 - (1/\alpha)$.

Если $\alpha = 1$, то при некоторых дополнительных условиях на распределения X_i устанавливается, что

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{c\pi H_n}{\overline{h} \log n} < x \right\} = \begin{cases} \int_0^x e^{-t}\, dt, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

В случае, когда сами слагаемые X_i имеют симметричные устойчивые распределения, и $h(s)=1$ при $-a\leqslant s<a$ и $=0$ при других s, аналогичные формулы были получены Чжуном и Кацем (Chung K. L., Kac M., Mem. Amer. Math. Soc., 1951, № 6, 11). В конце работы рассматривается аналогичная задача для двумерных случайных величин, имеющих одно и то же круговое нормальное распределение. Функция $h(x, y)$ предполагается суммируемой на всей плоскости. В этом случае нормировка и предельное распределение для H_n те же, что в одномерном случае при $\alpha=1$.

Авторы находят, что совместное предельное распределение пары $(x_n, y_n)=(H_n^1/(\overline{h}_1 n^{1-(1/\alpha)}), H_n^2/(\overline{h}_2 n^{1-(1/\alpha)}))$ соответствующей двум функциям $h_1(x)$ и $h_2(x)$ сосредоточено на прямой $x=y$. Отсюда следует, что $H_n^1/H_n^2\to\overline{h}_1/\overline{h}_2$ по вероятности (свойство «равнораспределенности» сумм независимых случайных величин, ср. РЖМат, 1954, 5182).

Примечание референта. Применяя иную нормировку, можно получить для случайного вектора $(H_n^1/\overline{h}_1, H_n^2/\overline{h}_2)$ собственное предельное распределение. А именно, для этого надо составляющую вектора в направлении $x=y$ умножать, как и раньше, на нормирующий множитель $n^{-(1-1/\alpha)}$, а составляющую вектора в перпендикулярном направлении — на множитель $n^{-(1-1/\alpha)/2}$.

Доказательства основаны на локальных предельных теоремах для распределений S_n. Р. Л. Добрушин

3857. Новое определение случайных функций и соответствующая эргодическая теорема. Дедебант (Sobre una nueva definición de función aleatoria y su teorema ergódico. Dedebant G.), 2° symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino América. Villavicencio-Mendoza, julio 1954, Montevideo, Centro coopcient., UNESCO América Latina, 1954, 281—297 (исп.)

Предлагается рассматривать случайные величины X как элементы вещественного гильбертова пространства H со скалярным произведением $(X, Y)=MXY$ (M — символ математического ожидания), а случайные функции $X(t)$ — как кривые в H. Указывается геометрический смысл условия стационарности $X(t)$ и связь теоремы Хинчина о спектральном разложении корреляционной функции с теоремой Стона о спектральном разложении однопараметрической группы унитарных операторов. В заключение обсуждается вопрос об эргодической теореме для стационарных случайных функций (со ссылкой на общую эргодическую теорему Биркгофа).

Следует отметить, что принятый здесь подход к понятию случайной функции совпадает с предложенным ранее А. Н. Колмогоровым (Докл. АН СССР, 1940, **26**, № 1, 6—9; Бюл. МГУ, 1941, **2**, № 6, 3—40; Изв. АН СССР, сер. матем., 1941, **5**, № 1, 3—14) и многократно использовался в литературе (это обстоятельство отмечено в дискуссии, приведенной непосредственно вслед за статьей). А. М. Яглом

3858. О локальной предельной теореме для решетчатых распределений. Прохоров Ю. В., Докл. АН СССР, 1954, 98, № 4, 535—538

Пусть

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \qquad (1)$$

— последовательность независимых случайных величин, принимающих только целочисленные значения; $s_n=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$.

$$A_n=Ms_n,\ B_n^2=Ds_n,\ P_n(m)=P(s_n=m).$$

Будет говорить, что последовательность (1) удовлетворяет локальной теореме в усиленной форме, если как для последовательности (1), так и для любой последовательности, получающейся из (1) изменением конечного числа членов (с сохранением требования целочисленности), при $n\to\infty$ равномерно по m, $-\infty<m<+\infty$, выполняется соотношение

$$P_n(m)=(2\pi)^{-1/2}B_n^{-1}\exp\{-(m-A_n)^2/2B_n^2\}+o(B_n^{-1}).$$

Доказывается теорема: Для того чтобы последовательность (1), подчиненная дополнительным требованиям: 1) ξ_n равномерно ограничены, 2) $P(\xi_n=0)\geqslant P(\xi_n=j)$ для всех n, 3) $B_n\to\infty$ ($n\to\infty$), удовлетворяла локальной теореме в усиленной форме, необходимо и достаточно условие: общий наибольший делитель всех целых j, для которых $\sum_{n=1}^{\infty}P(\xi_n=j)=+\infty$, равен единице. А. А. Бобров

3859. Распределение случайных определителей. Найкуист, Райс, Риордан (The distribution of random determinants. Nyquist H., Rice S. O., Riordan J.), Quart. Appl. Math., 1954, **12**, № 2, 97—104 (англ.)

Пусть $D_n=|a_{ij}|$ — определитель n-го порядка, элементы которого являются независимыми случайными величинами с одной и той же функцией распределения, симметричной относительно нуля и имеющей дисперсию, равную единице. В дополнение к известному тривиальному результату $E(D_n^2)=n!$ доказывается, что

$$E(D_n^4)=\frac{(n!)^2}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{k!}(m_4-3)^k,$$

где $m_4=E(a_{ij}^4)$. Приводятся выражения для $E(D_n^6)$ при $n=1, 2, 3$ и 4. При дополнительном предположении о нормальной распределенности величин a_{ij} устанавливается рекуррентная формула для среднего значения произвольной функции определителя D_n. Отсюда получаются простые выражения для моментов четного порядка:

$$E(D_n^{2k})=n!\frac{(n+2)!}{2!}\cdots\frac{(n+2k-2)!}{(2k-2)!}.$$

В заключение изучается полученное авторами интегральное представление плотности распределения D_n.

Указывается, что к рассмотрению подобных задач приводит решение систем линейных уравнений при помощи счетных машин. В. В. Петров

3860. Новое решение задачи Эренфестов. Хесс (Alternative solution to the Ehrenfest problem. Hess F. G.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 5, 323—328 (англ.)

В 1907 г. П. и Т. Эренфесты в связи с полемикой вокруг H-теоремы Больцмана о приближении к тепловому равновесию рассмотрели модель движения газа, сводящуюся к следующей вероятностной схеме. $2R$ шаров как-то размещены в двух урнах. Из всех $2R$ шаров выбирают наугад один и перекладывают его из той урны, где он был, в другую. Подобный опыт повторяют большое число раз.

Кац нашел точное выражение вероятности $P(n\,|\,m; s)$ того, что в первой урне после s опытов окажется $R+m$ шаров, если в начальный момент в ней было $R+n$ шаров (Kac M., Amer. Math. Monthly, 1947, 54, 369—391). При этом он рассматривал цепь Маркова, в которой состояние определялось числом шаров в первой урне. Автор решает ту же задачу, рассматривая цепь, состояния которой определяются тем, какие именно шары находятся в первой урне. Благодаря этому

решение упрощается и ответ получается в более симметричной форме:

$$\binom{2R}{R+n} P(n \mid m; s) =$$

$$= \frac{1}{2^{2R}} \sum_{j=-R}^{R} \left(\frac{j}{R}\right)^s \binom{2R}{R+j} K_{R+m}^{j} K_{R+n}^{j},$$

где коэффициенты K_i^j находятся из разложения

$$(a+1)^{R+j}(a-1)^{R-j} = \sum_{i=0}^{2R} K_i^j a^i.$$

Такое измельчение состояний для решения этой и других задач применял Зигерт (Siegert A. J. F., Phys. Rer , 1949, 76, 1708—1714). А. А. Юшкевич

3861. **Кратные точки траекторий броуновского движения на плоскости. Дворецкий, Эрдеш, Какутани** (Multiple points of paths of brownian motion in the plane. Dvoretzky A., Erdös P., Kakutani S.), Bull. Res. Council Israel, 1954, 3, № 4, 364—371 (англ.)

Рассмотрим n-мерное броуновское движение $X(t, \omega)$, где t — временный параметр, ω — элементарные события. Говорят, что при некотором ω отрезок траектории $[a, b]$ содержит k-кратную точку, если для некоторых $a \leqslant t_1 < \ldots < t_k \leqslant b$ имеет место равенство $X(t_1, \omega) = \ldots = X(t_k, \omega)$. Путем тонких оценок авторы доказывают, что при $n = 2$ и почти всех ω в любом отрезке траектории содержатся точки сколь угодно большой кратности. Существование двукратных точек у двумерного броуновского движения было доказано много раньше Леви (Levy P., Amer. J. Math., 1940, 62, 487—550). Позже авторы (Acta scient. math., 1950, **B12**, 75—81) показали, что при $n = 3$ с вероятностью 1 существуют двукратные точки, а при $n \geqslant 3$ они с вероятностью 1 отсутствуют. Р. Л. Добрушин

3862 Д. **Некоторые вопросы теории цепей Маркова — Брунса. Маневич Д. В.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ин-т матем. и механ. АН УзССР, Ташкент, 1954

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

3863. **Процессы Маркова в задачах математической статистики (Доклад на 3-м Всесоюзном совещании по теории вероятностей и математической статистике). Гихман И. И.**, Укр. матем. ж., 1954, 6, № 1, 28—36

Пусть $F_N(x)$ и $F(x)$ — эмпирическая и, соответственно, теоретическая функции распределения; первая из них построена по N независимым наблюдениям величины ξ, вторая предполагается непрерывной. Случайная функция $\xi(t) = F_N(x)$, где $t = F(x)$, рассматривается как реализация некоторого разрывного марковского процесса. Отыскание предельного распределения критерия Колмогорова $D_N = \max \sqrt{N} \mid \xi(t) - t \mid (0 \leqslant t \leqslant 1)$, а также ряд других непараметрических задач математической статистики сводится к диффузионным проблемам для марковских процессов указанного типа и обобщений, рассмотренных ранее автором (РЖМат, 1954, 2638, 3020, 3034, 5670). Не приводя детальных доказательств, автор дает обзор полученных им на этом пути многочисленных результатов. Н. В. Смирнов

3864. **Упорядоченные выборки. Романовский В. И.**, Тр. Среднеаз. ун-та, 1954, № 36, 41—63

Дается систематическое изложение основных формул, связанных с распределением членов вариационного ряда, квантилей и т. п. Б. В. Финкельштейн

3865. **Расширенная таблица t-распределения Стьюдента для односторонних и двусторонних критериев значимости с 5 и 1% доверительными уровнями Олекевич** (An extended table of Student's t-distribution for one-sided and two-sided tests of significance at 5 and 1% probability levels. Olekiewicz M.), Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska 1951 (1952), 5, A, 161—163 (англ., резюме русск., польск.) (журнал вышел из печати в 1953 г.)

Болдуин (Baldwin E., Biometrica, 1946, 33, part 4, 362) составила таблицу p-процентных значений для распределения Стьюдента для четных чисел степеней свободы n ($30 \leqslant n \leqslant 100$) и для $p = 5$ и $p = 1$.

Эта таблица расширена автором: добавлены значения n от 1 до 30 и значения $p = 10$ и $p = 2$. Значения t_p даны с тремя знаками после запятой.

А. С. Монин

3866. **Заметка о способе Неймана-Джонсона. Эйбелсон** (A note on the Neyman-Johnson technique Abelson Robert P.), Psychometrika, 1953 18, № 3, 213—218 (англ.)

Рассматриваются две группы индивидуумов G и H. Предполагается, что могут быть получены для всех членов обеих групп измерения проверочной переменной y и r контрольных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_r$, и что регрессия y на x для каждой группы линейна:

$$\hat{y}_G = b_{0G} + b_{1G} x_1 + \ldots + b_{rG} x_r,$$

$$\hat{y}_H = b_{0H} + b_{1H} x_1 \ldots + + b_{rH} x_r.$$

Обычно, при помощи ковариационного анализа проверяются последовательно гипотезы:

A. Дисперсии наблюдаемых y около поверхностей регрессии одинаковы.

B. Коэффициенты регрессии одинаковы для обеих групп ($b_{iG} = b_{iH}$, $i = 1, 2, \ldots, r$).

C. b_{0G} и b_{0H} равны.

Автор предлагает свой способ проверки этих гипотез, не обязательно в указанном порядке. Способ автора использует выгодные стороны ковариационного анализа и способа Неймана — Джонсона, предложенного последними для исследования тех же гипотез (Johnson P. O., Neyman J., Statistic. research memoirs, 1936, 1, 57—93). Дается обобщение способа Неймана — Джонсона на случай n предикторов. В. И. Романовский

3867. **Заметка об оценке среднего по упорядоченной выборке с помощью способа наименьших квадратов. Даунтон** (A note on ordered least-squares estimation. Downton F.), Biometrika, 1953, 40, part 3, 4, 457—458 (англ.)

Пусть случайная величина ξ имеет плотность вида $f[(x-\mu)/\sigma]$, где $\mu = M\xi$, $\sigma^2 = D\xi$. Рассматривается задача оценки μ при известном σ по n независимым наблюдениям $x_1, \ldots, x_n$ величины ξ. Расположим все x_i в возрастающем порядке $x_{(1)} < \ldots < x_{(n)}$ и обозначим через $\mathbf{z}$ вектор с компонентами $(x_{(i)} - \mu)/\sigma$. Пусть $M\mathbf{z} = \alpha$, $M(\mathbf{z}'\mathbf{z}) = \mathbf{w}$, где $\mathbf{z}'$ — транспонированный вектор $\mathbf{z}$ (математическое ожидание α и матрица вторых моментов $\mathbf{w}$ не зависят от параметров μ и σ и предполагаются известными). Оценка μ, найденная с помощью способа наименьших квадратов по упорядоченной выборке $\mathbf{x} = \{x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}\}$, имеет вид

$$\hat{\mu} = \alpha' \mathbf{w}^{-1} (\alpha \mathbf{1}' - \mathbf{1}\alpha') \mathbf{w}^{-1} \mathbf{x} / \Delta,$$

где $\Delta = (\mathbf{1}'\mathbf{w}^{-1}\mathbf{1})(\alpha'\mathbf{w}^{-1}\alpha) - (\mathbf{1}'\mathbf{w}^{-1}\alpha)^2$, а $\mathbf{1}$ — n-мерный вектор, все компоненты которого равны единице.

Ллойд доказал, что в случае симметрического распределения имеет место неравенство $D\hat{\mu} \leqslant \sigma^2/n$, причем $D\hat{\mu} = \sigma^2/n$ тогда и только тогда, когда $\hat{\mu}$ совпадает с выборочным средним (Lloyd E. H., Biometrika, 1952

39, 88). Автор показывает, что результаты Ллойда верны и в несимметричном случае. Л. Н. Большев

3868. **Доверительные и толерантные интервалы для нормального распределения. Прошан** (Confidence and tolerance intervals for the normal distribution. Proschan Frank), J. Amer. Statist. Assoc., 1953, 48, № 263, 550—564 (англ.)

Пусть случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами μ и σ, $\bar{x} = \Sigma x_i / n$ — выборочное среднее, $\bar{s}^2 = [\Sigma (x_i - \bar{x})^2] / (n-1)$ — несмещенная оценка для σ^2. Обозначим

$$m = \begin{cases} \mu, & \text{если } \mu \text{ известно} \\ \bar{x}, & \text{если } \mu \text{ неизвестно} \end{cases}$$

$$s = \begin{cases} \sigma, & \text{если } \sigma \text{ известно} \\ \bar{s}, & \text{если } \sigma \text{ неизвестно.} \end{cases}$$

Приводятся таблицы, в которых для различных объемов выборки указаны: 1) 50%-ные доверительные интервалы $m \pm ks$ для μ и для второго выборочного среднего при том же объеме выборки, 2) 50%-ные допустимые (толерантные) интервалы $m \pm ks$, 3) толерантные интервалы $\bar{x} + k\bar{s}$, соответствующие вероятностям $P = 100\,p = 50$; 75; 90; 95; 98; 99; 99,9. В таблицах 2) и 3) речь идет об интервалах, определяемых соотношениями

$$P(m - ks < \xi < m + ks) = \pi, \quad M(\pi) = p.$$

Кроме того, в таблице 2) для случаев $m = \mu$, $s = \bar{s}$ и $m = \bar{x}$, $s = \sigma$ даны значения k, соответствующие предположению, что

$$P(\pi \geqslant 1/2) = 1/2.$$

А. А. Петров

3869. **Метод упорядочения нормальных совокупностей с неизвестными дисперсиями по величинам их средних значений при помощи двух выборок. Бекхофер, Даннетт, Собел** (A two-sample multiple decision procedure for ranking means of normal populations with a common unknown variance. Bechhofer Robert E., Dunnett Charles W., Sobel Milton), Biometrika, 1954, 41, № 1, 2, 170—176 (англ.)

Пусть ξ_i, $i = 1, \ldots, k$, суть независимые нормальные величины с неизвестными средними значениями μ_i и дисперсиями $\sigma_i^2 = a_i \sigma^2$, где a_i — известные целые числа, а σ^2 неизвестно. Требуется по данным выборок упорядочить величины ξ_i в порядке возрастания их средних значений.

Предлагается получить выборки x_{ij} объемов $a_i N_0$, вычислить общую дисперсию

$$S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^{a_i N_0} \left(x_{ij} - \frac{1}{a_i N_0} \sum_{j=1}^{a_i N_0} x_{ij} \right)^2,$$

являющуюся несмещенной оценкой для σ^2 и имеющую $n = N_0 \sum_{i=1}^{k} a_i - k$ степеней свободы, и затем получить вторые выборки объемов $(N - N_0)\, a_i$, где $N = \max \{N_0, [2S_0^2 (h/\delta^*)^2]\}$, причем h — положительная постоянная, а δ^* — наименьшее подлежащее различению значение разностей $\delta_{i+1,\,i} = \mu_{[i+1]} - \mu_{[i]}$ упорядоченных средних значений $\mu_{[i]}$. Упорядочение предлагается производить по общим для обеих выборок средним значениям $\bar{x}_i = \left(\sum_{j=1}^{a_i N} x_{ij} \right) / (a_i N)$. Величина h подбирается так, чтобы вероятность P того, что упорядочение произведено правильно, была не менее фиксированного числа. Для этого указанная вероятность выражается в виде интеграла, который при $k = 2, 3$ сводится к табулированным.

Дана также номограмма для определения математического ожидания $E(N)$ при фиксированном P и различных N_0 и δ^*/δ. А. С. Монин

3870. **Графический метод анализа статистического распределения с двумя нормальными компонентами. Престон** (A graphical method for the analysis of statistical distributions into two normal components. Preston Eric J.), Biometrica, 1953, 40, part 3, 4, 460—464 (англ.)

3871. **Метод упорядочения нормальных совокупностей по величинам их дисперсий с помощью одной выборки. Бекхофер, Собел** (A single-sample multiple decision procedure for ranking variances of normal populations. Bechhofer Robert E., Sobel Milton), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 2, 273—289 (англ.).

Пусть ξ_i, $i = 1, \ldots, k$, суть независимые нормальные величины с известными средними значениями μ_i и неизвестными дисперсиями σ_i^2. По выборочным значениям x_{ij}, $j = 1, \ldots, N_i$, требуется расставить величины ξ_i в порядке убывания их дисперсий. Предлагается проделывать это по выборочным дисперсиям s_i^2, причем рассматривается лишь случай, когда их числа степеней свободы одинаковы (равны n). Рассматриваются две процедуры, в первой из которых требуется выбрать t величин ξ_i, дисперсии которых $\sigma_{[1]}^2, \ldots, \sigma_{[t]}^2$ меньше, чем дисперсии остальных $k - t$ величин. Фиксируя наименьшее подлежащее различению значение $\theta_{t+1,\,t}^*$ отношения $\theta_{t+1,\,t} = \sigma_{[t+1]}^2 / \sigma_{[t]}^2$, надлежит указать такое n, чтобы вероятность того, что упорядочение правильно, была не меньше заданного числа P. Во второй процедуре требуется упорядочить ξ_i так, чтобы было $\sigma_{[1]}^2 \leqslant \sigma_{[2]}^2 \leqslant \cdots \leqslant \sigma_{[t]}^2 \leqslant \min \{\sigma_{[t+1]}^2, \ldots, \sigma_{[k]}^2\}$. Фиксируя наименьшие подлежащие различению значения $\theta_{i+1,\,i}^*$ $(i = 1, \ldots, t)$ отношений $\theta_{i+1,\,i} = \sigma_{[i+1]}^2 / \sigma_{[i]}^2$, надлежит указать такое n, чтобы вероятность того, что упорядочение правильно, была не меньше заданного числа P.

Вероятности правильного упорядочения выражаются в виде интегралов, по которым рассчитаны таблицы значений P при заданных n и θ^* для $k = 2, 3, 4$. Так, например, дана таблица значений $P\{s_{[1]}^2 < s_{[2]}^2\}$ при заданных $\sigma_{[2]}^2 / \sigma_{[1]}^2 = \theta^*$ от 1,0 до 2,2 и n от 1 до 20. Вероятности рассчитаны по точным формулам, а также с помощью нормальной аппроксимации, пригодной в случае больших выборок. А. С. Монин

3872. **Об одном случае разыскания плановых излишков. Райский** (O pewnym przypadku obliczania nadmiarów planowanych. Rajski C.), Zastosow. mat., 1953, 1, № 1, 46—54 (польск.; резюме русс., англ.)

Рассматривается случай, когда поставщик (производство) доставляет и хорошие и плохие изделия. Пусть потребитель (например, магазин) нуждается ежегодно в L изделиях, а заказывает $L' > L$. Тогда $r = (L' - L)/L$ называется относительным излишком товара. Качеством w товара называется отношение $w_0 = k/N$, где k — число негодных изделий и N — их общее число. Если качество товара, принятого в течение года потребителем, равно w_0, то средний излишек определяется на основании равенства $r = w_0/(1 - w_0)$.

Цель работы — дать способ разыскания плановых излишков штучного товара при помощи статистического контроля и сортировки партий, признанных плохими,

и достичь, таким образом, того, чтобы доля брака в принятом товаре не превышала нужной доли.

Подробно рассмотрен следующий порядок контроля. В продолжение года поставщик доставляет потребителю b партий одного и того же объема N и качества w_d. Каждая партия проверяется при помощи случайной выборки объема n с критическим числом m. Вероятность приема партии равна

$$P = \sum_{z=0}^{m} \binom{n}{z} w_d^z (1 - w_d)^{n-z}. \quad (1)$$

Если число негодных изделий в партии более m, то партия сортируется, т. е. подвергается сплошной проверке, и потребитель принимает только хорошие изделия (плохие изделия при этом заменяются хорошими). При таком плане контроля среднее качество принятого товара будет большей частью менее w_α, так как тогда $w_0 = w_d x / b$, где x — число принятых без сортировки партий.

Если $P(x \leqslant a) = q$, то при

$$g = w_d a / b, \; P(w_0 \leqslant g) = \text{также } q. \quad (2)$$

Вероятность

$$q = \sum_{x=0}^{a} \binom{b}{x} p^x (1 - p)^{b-x} \quad (3)$$

называется коэффициентом гарантии излишка.

Теперь имеется возможность найти плановый излишек, если даны коэффициент гарантии излишка, b, m и n. Берется какое-либо a. Находится p из (3); найденное p подставляется в (1), откуда затем находится w_d; по a, b и w_d из (2) находится g. Беря другие значения a, находят $b - 1$ значений g, из которых берут наибольшее, $g_{\max}$. Тогда при помощи равенства $r = g_{\max} / (1 - g_{\max})$ находят плановый излишек, причем риск, что он окажется недостаточным в самом невыгодном случае, будет равен $1 - q$. Под таким случаем разумеется случай, когда поставщик будет доставлять товар с качеством, для которого $g = g_{\max}$. Он мало вероятен и поэтому действительный риск вообще менее $1 - q$. Действительный риск можно вычислить лишь тогда, когда известно распределение качества товара, а оно известно лишь в редких случаях.

В работе дан графический способ разыскания размеров излишка, который нужно заказать. Дан экономический анализ способа. В. И. Романовский

3873. Библиография непараметрических методов статистики и связанных с ними тем. Сэвидж (Bibliography of nonparametric statistics and related topics. Savage Richard), J. Amer. Statist. Assoc., 1953, 48, № 264, 844—906 (англ.)

Библиографический указатель 999 работ по непараметрическим методам математической статистики и смежным областям за последние два десятилетия. Работы классифицированы по следующим разделам: (A) Обзоры и дискуссии. (B) Вопросы общей теории. (C) Неравенство Чебышева. (D) Толерантные (допустимые) пределы. (E) Критерии согласия. (F) Критерии, относящиеся к нескольким выборкам. (G) Некоторые непараметрические решения вопросов, связанных с оценкой параметров. (H) Таблицы контингенции. (I) Испытания «случайности». (J) Вопросы корреляции и кривых распределения. (K) Сравнительное изучение мощности критериев. (L) «Систематические» статистики (определяемые по ранговым характеристикам). (M) Теория «скалирования» (т. е. упорядочивание объектов по свойствам, не поддающимся точному измерению). (N) Проблемы распределения в непараметрических процедурах. (O) Приложения. (P) Таблицы. (X) Смесь.

Н. В. Смирнов

3874 К. Основы статистики. Сэвидж (The foundations of statistics. Savage Leonard Jimmie. XV + 294 p., tab., diagr., New York, Wiley London, Chapman and Hall, 1954, 48 s.), Brit. Nat. Bibliogr., 1954, № 250, 9 (библ.)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ТЕХНИКЕ

3875. Кодирование информации, дающее минимальную стоимость. Блакман (Minimum-cost encoding of information. Blachman Nelson M.), Trans. I. R. E., 1954, PGIT-3, 139—149 (англ.)

Задачу выбора наиболее дешевого кода для передачи информации данного типа обычно разделяют на две части: 1) предполагая, что передача каждого символа x_i ($i = 1, 2, \ldots$) имеет определенную стоимость k_i, найти такую систему частот p_i этих символов, при которой стоимость передачи данного количества информации была бы наименьшей; 2) выбрать код, при котором частоты передачи различных символов, будучи взаимно независимыми, принимали бы предписанные значения p_i ($i = 1, 2, \ldots$). Вторая задача асимптотически решается известными работами Шеннона и Фано, и в настоящей статье метод ее решения лишь кратко напоминается в «приложении»; в основном же статья посвящена решению первой задачи. При данном распределении p_i средняя стоимость передачи одного символа равна

$$K = \sum_i p_i k_i,$$

тогда как среднее количество информации, передаваемой одним символом, согласно теории Шеннона в отсутствие помех равно

$$I = -\sum_i p_i \log p_i;$$

речь идет, таким образом, о наименьшем значении функции K / I переменных p_i, при нормирующем условии

$$\sum_i p_i = 1.$$

Задача решается элементарно и дает оптимальное распределение

$$p_i = \exp(-Ik_i / K) \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

где величина I / K определяется нормирующим условием. Автор обращает внимание на то, что стоимость передачи во всех этих рассуждениях не обязательно должна пониматься как денежный расход; под стоимостью передачи можно подразумевать, например, необходимую затрату времени, энергию посылаемых импульсов и т. д.

В случае наличия помех задача несколько осложняется, но принципиально может быть решена теми же методами. Кроме распределения p_i посылаемых символов, здесь приходится рассматривать распределение p_j' получаемых символов (вообще говоря, иной природы), а также матрицу «переходных» вероятностей p_{ij} получения j-го символа при посылке i-го символа, причем

$$p_j' = \sum_i p_i p_{ij}, \qquad p_i = \sum_j p_j' p_{ji}'. \quad (1)$$

где p_{ji}' — матрица, обратная матрице p_{ij}. В этом случае согласно Шеннону,

$$I = -\sum_j p_j' \log p_j' + \sum_{i,j} p_i p_{ij} \log p_{ij},$$

и удобнее сначала искать оптимальное распределение p_j' получаемых символов, чтобы затем с помощью вто-

ого из равенств (1) перейти к распределению p_i. Задача решается прежним методом и снова приводит выражениям показательного типа. Эффектом помех этих выражениях является, как показывают результаты расчета, только увеличение стоимости передачи каждого символа на величину, выражающую собою энтропию получаемого символа при данном посылаемом символе. А. Я. Хинчин

3876. **Новая основная теорема теории информации. Фейнстейн** (A new basic theorem of information theory. Feinstein Amiel), Trans. I. R. E., 1954, PGIT-4, 2—22 (англ.)

Рассматриваются дискретные источники с фиксированным конечным алфавитом. Пусть $H(X)$ — энтропия источника (на один символ), $H(X/Y)$ — осредненная по принимаемому символу y условная энтропия источника при данном принятом символе. Величину $E=H(X)-H(X/Y)$, зависящую как от свойств источника, так и от свойств канала, обычно принимают в качестве меры практически передаваемой информации на один символ. Теорема, которую автор называет главной и к которой, повидимому, относится заглавие статьи, состоит в следующем.

Пусть даны источник и канал, так что величина E однозначно определена. Для любого $\varepsilon>0$ существует такое $n(\varepsilon)$, что при любом $n>n(\varepsilon)$ среди n-членных цепочек $u(x_1,\ldots,x_n)$, посылаемых данным источником символов, найдется группа $\{u_i\}$ $(1\leqslant i\leqslant N)$ «отборных» цепочек, обладающая следующими свойствами: 1) $N\geqslant 2^{(E-\varepsilon)n}$; 2) каждой цепочке u_i $(1\leqslant i\leqslant N)$ можно поставить в соответствие такое множество B_i n-членных цепочек $v(y_1,\ldots,y_n)$ получаемых сигналов, что $B_iB_k=0$ $(i\neq k)$ и $p(B_i/u_i)>1-\varepsilon$ $(1\leqslant i\leqslant N)$.

Автор показывает, что с помощью этой теоремы может быть сравнительно просто доказана фундаментальная теорема Шеннона об условиях возможности почти безошибочной передачи в каналах с помехами. Идейная схема этого доказательства состоит в том, что рассматривается любой источник S_0 с энтропией $H_0<C$, где C — пропускная способность канала. По определению, C есть верхняя грань величины E по всем источникам с данным алфавитом. Поэтому существует источник S, для которого $H_0<E\leqslant C$. Тогда, выбирая $\varepsilon<E-H_0$ и применяя доказанную теорему к источнику S, мы находим при достаточно большом n группу «отборных» n-членных цепочек, причем $N\geqslant 2^{n(E-\varepsilon)}>2^{nH_0}$. Но среди n-членных цепочек источника S_0 имеется, как известно, 2^{nH_0} «высоковероятностных», которые и могут быть закодированы взаимно однозначно с помощью отборных цепочек источника S, чем вопрос в принципе и решается (правда, техника остающихся подсчетов еще довольно громоздка). Все исследование ведется в предположении взаимной независимости посылаемых источником сигналов, что очевидным образом ограничивает практическое значение результатов; попытка автора (в последнем разделе статьи) освободиться от этого ограничения, повидимому, не дает ничего законченного.

Примечание референта. Изложение страдает нечеткостью, во многих случаях делающей мысль автора непонятной. В частности, формулировка главной теоремы, приведенная выше, значительно отличается от формулировки автора, по мнению референта, не имеющей ясного смысла. А. Я. Хинчин

3877. **Исследование эргодичности и избыточности на основе корреляции конечного диапазона между символами. Ватанабе** (A study of ergodicity and redundancy based on intersymbol correlation of finite range. Watanabe Satosi), Trans. I. R. E., 1954, PGIT-4, 85—92 (англ.)

Целью статьи является детальное исследование некоторых вопросов теории информации в случае, когда продукция источника представляет собой сложную цепь Маркова, порядок ν которой называется диапазоном (range) системы. По мнению автора, здесь, в противоречии с распространенным необоснованным мнением, возможны явления более сложные, чем в случае простых цепей ($\nu=2$). Первый раздел статьи посвящен вопросам эргодичности и излагается вне всякой связи с теорией информации, как глава учения о сложных цепях Маркова. Основной задачей служит вопрос о существовании предельной вероятности $P(a_1,\ldots,a_{\mu-1})$ данной группы $\mu-1$ последовательных символов и о независимости этой вероятности от начальных данных, которыми здесь служат первые $\nu-1$ символов цепи. Показывается, что только при $\mu=\nu$ результаты аналогичны тем, которые имеются в случае простых цепей; в случаях же $\mu<\nu$ и $\mu>\nu$ существование предельных вероятностей требует дополнительных условий.

Второй раздел ближе примыкает к основным понятиям теории информации. Полагая в эргодическом случае

$$S_k=-\sum P(a_1,\ a_2,\ldots,\ a_k)\log P(a_1,\ a_2,\ldots,\ a_k),$$

где суммирование ведется по всем группам $(a_1,\ a_2,\ldots,\ a_k)$ из k символов, обычно считают величину $S_k/k=I_k$ средним количеством информации, приходящимся на один символ, в случае k-членной цепи. Полагая, далее, для $\mu\geqslant 2$

$$W_\mu=2S_{\mu-1}-S_\mu-S_{\mu-2},$$

легко показать, что всегда $W_\mu\geqslant 0$ и что $W_\mu=0$ при $\mu>\nu$, так что ряд «индексов корреляции» W_μ дает прежде всего представление о диапазоне системы, как наибольшем числе μ, для которого $W_\mu\neq 0$. Пусть, далее, I^0 означает количество информации, которое приходилось бы на один символ, если бы все символы обладали теми же вероятностями, но были взаимно независимыми, так что

$$I^0=-\sum P(a_1)\log P(a_1).$$

Полагая $I_\infty=\lim_{n\to\infty}I_n$, обычно называют «избыточностью» (redundancy, Шеннон) данного источника величину

$$R=(I^0-I_\infty)/I^0$$

(причем всегда $0\leqslant R\leqslant 1$), которая может служить мерой относительного уменьшения количества передаваемой источником информации, вызываемого наличием корреляционной связи между символами. Легко показать, что

$$R=\left(\sum_{\mu\geqslant 2}W_\mu\right)/I^0.$$

Таким образом, ряд корреляционных индексов, определяющий собою диапазон системы, вместе с тем оценивает и силы корреляционной связи, по меньшей мере в вопросе о воздействии этой связи на замедление темпа передачи информации. А. Я. Хинчин

3878. **Потеря информации при решении задачи об обнаружении сигнала. Мидлтон** (Information loss attending the decision operation in detection. Middleton David), J. Appl. Phys., 1954, 25, № 1, 127—128 (англ.)

Проблема обнаружения сигнала на фоне шума формулируется как задача проверки статистических гипотез при двух альтернативах H_1 (наличие сигнала) и H_0 (отсутствие сигнала) (РЖМат, 1955, 1405).

Пусть x — посланное сообщение, а y — принятое сообщение (после возможного наложения шума).

Количество информации H_T и потеря информации $H(x \mid y)$ после принятия определенного решения о присутствии или отсутствии сигнала определяются по формулам

$$H_T = H(x) - H(x \mid y), \quad H(x) = -p \log p - q \log q,$$

$$H(x \mid y) = -\sum_{k,\, j=1}^{2} p(x_j,\, y_k) \log [p(x_j,\, y_k) / p(y_k)],$$

$$p(x_1,\, y_1) = p(1-\beta), \quad p(x_1,\, y_2) = p\beta, \quad p(x_2,\, y_1) = q\alpha,$$
$$p(x_2,\, y_2) = q(1-\alpha), \; p(y_k) = \sum_{j=1}^{2} p(x_j,\, y_k).$$

Здесь p и q — априорные вероятности наличия и отсутствия сигнала, α — вероятность ложного обнаружения сигнала, β — вероятность пропуска сигнала.

Выписываются выражения $H(x \mid y)$ при $\alpha \doteq 0$ и $\beta > 0$ и при $\alpha = \beta$, и сравниваются потери информации при различных способах проверки статистических гипотез.

В частности, показывается, что при одинаковых априорных вероятностях p и q и одних и тех же ограничениях на канал потеря информации при проверке гипотез по методу «идеального наблюдателя» будет значительно меньше, чем при проверке гипотез по методу Неймана — Пирсона. М. С. Пинскер

3879. Очереди с групповым обслуживанием. Б е й л и (On queueing processes with bulk service. B a i l e y N o r m a n T. J.), J. Roy. Statist. Soc., 1954, **16**, № 1, 80—87 (англ.)

Рассматривается случай, когда ожидающие в очереди клиенты обслуживаются целыми группами (очереди у музеев, лифтов, различных видов транспорта и т. д.). Промежуток времени между двумя соседними началами обслуживания называется интервалом и предполагается случайной величиной с данным законом распределения $B(v)$. Пусть s — максимальная численность обслуживаемой группы (так что в случае, когда в момент начала обслуживания имеется q ожидающих, численность группы равна q при $q \leqslant s$ и равна s при $q \geqslant s$). Случайное число клиентов, прибывающих в единицу времени, подчиняется, как обычно, закону Пуассона с параметром λ. Отсюда вероятность прибытия r клиентов в течение одного интервала равна

$$k_r = \frac{1}{r!} \int_0^\infty e^{-\lambda v} (\lambda v)^r \, dB(v),$$

и производящая функция

$$K(z) = \sum_{r=0}^{\infty} k_r z^r = \int_0^\infty e^{\lambda v (z-1)} \, dB(v)$$

может считаться заданной.

Пусть $P_q^{(n)}$ — вероятность иметь q ожидающих непосредственно перед n-м началом обслуживания, и p_{lq} — вероятность роста очереди от l до q в течение одного интервала, так что $P_q^{(n+1)} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l^{(n)} p_{lq}$, и мы приходим к однородной простой цепи Маркова с легко вычисляемой матрицей $\| p_{lq} \|$ переходных вероятностей. Это позволяет применить к исследованию предельного поведения (при $n \to \infty$) вероятностей $P_q^{(n)}$ результаты общей теории цепей Маркова. В эргодическом случае существует нормируемый вектор x_q ($q = 1, 2, \ldots$), удовлетворяющий уравнениям

$$\sum_{l=0}^{\infty} x_l p_{lq} = x_q \quad (q = 0, 1, 2, \ldots);$$

полагая

$$\pi_q = x_q \Big/ \sum_{l=0}^{\infty} x_l,$$

мы имеем $P_q^{(n)} \to \pi_q$ при $n \to \infty$. Обозначая через $\Pi(z)$ производящую функцию распределения π_q и выражая элементы матрицы $\| p_{lq} \|$ через определенные выше числа k_r, автор легко находит соотношение

$$\Pi(z) = \left[\sum_{q=0}^{s-1} \pi_q (z^s - z^q)\right] / [z^s / (K(z) - 1)],$$

весьма просто выражающее закон распределения длины очереди через данные элементы задачи. Это соотношение и является основным результатом работы. Для более детального его исследования автор в дальнейшем ограничивается рассмотрением случая

$$dB(v) = a^p (\Gamma(p))^{-1} v^{p-1} e^{-av} \, dv,$$

($a > 0$, $p > 0$ — целое), что включает наиболее важные частные случаи показательного и (в пределе) стандартного распределения длин интервалов. При этом

$$K(z) = \{1 + \lambda(1 - z)/a\}^{-p};$$

знаменатель в выражении $\Pi(z)$ имеет, кроме $z = 1$, еще $s + p - 1$ нулей $z_1, \ldots, z_{s+p-1}$, из которых первые $s - 1$ лежат в круге $|z| \leqslant 1$, а остальные — вне этого круга, и

$$\Pi(z) = \prod_{j=s}^{s+p-1} (z_j - 1)(z_j - z)^{-1}.$$

При $p = 1$ мы имеем показательное распределение длин интервалов, а

$$\Pi(z) = (z_s - 1)(z_s - z)^{-1},$$

где z_s — единственный нуль знаменателя вне круга $|z| \leqslant 1$. При $p = a \to \infty$ мы в пределе получаем случай стандартной длины интервала, практически очень важный для изучаемой задачи, и также детально исследуемый в работе.

В последнем разделе автор, указав на трудности, возникающие при отыскании закона распределения времени ожидания, вместе с тем показывает, что среднее время ожидания может быть легко найдено на основе построенной теории. А. Я. Хинчин

3880. Задержки телефонных вызовов, обслуживаемых в случайном порядке. В о л о (Délais d'attente des appels téléphoniques traités au hasard. V a u l o t E m i l e), Ann. télécommuns, 1954, **9**, № 1, 9—14 (франц.)

Продолжение работы автора (C. r. Acad. sci, 1946, **222**, № 5, 268—269), посвященной вычислению вероятности $A(t, y)$ того, что вызов задержится на время, большее t, считая с момента его появления. При этом предполагается, что имеется полнодоступный пучок линий, время обслуживания распределено показательно со средним единица, вызовы поступают по закону Пуассона с плотностью y и каждый из n ожидающих в данный момент вызовов может с вероятностью $1/n$ занять освобождающуюся линию.

В настоящей работе развит метод численного расчета $A(t, y)$. Выведенное в цитированной выше работе дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных для функции $A(t, y)$ решается с помощью преобразования Лапласа, примененного к переменной t. Используя существующие таблицы относительного количества неудовлетворенных немедленно вызовов, автор доводит расчет до численных результатов в форме таблиц. Ср. также РЖМат, 1953, 846. Т. А. Ш.

3881. Математическое ожидание числа группировок при случайном размещении и случайной ориентации выпуклых фигур на данной площади. М а к (The expected number of clumps when convex laminae are placed at random and with random orientation on a plane area. M a c k C.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, **50**, № 4, 581—585 (англ.)

Под группировкой (clump) имеется в виду группа фигур, каждая из которых перекрывается по меньшей мере с одной другой фигурой той же группы. Поставленная задача имеет практическое значение при подсчете числа мелких частиц в поле микроскопа, когда группировка неотличима от отдельной частицы. Для общности отдельная фигура, не перекрывающаяся с другими, рассматривается как частный случай группировки. Пусть на данной площади A случайно (в смысле как положения, так и ориентации) размещаются выпуклые фигуры, среди которых имеется N_r фигур площади a_r и периметра s_r $(r = 1, 2, \ldots, k)$, и пусть α — любая часть A. Положим

$$Ab_{ur} = a_u + a_r + s_u s_r / 2\pi \quad (u, r = 1, 2, \ldots, k)$$

и обозначим соответственно через C, C_1 и β математические ожидания числа группировок в α, числа отдельных (не перекрывающихся с другими) фигур в α и площади свободной от фигур части α. Тогда

$$C = (\alpha / A) \sum_{r=1}^{k} N_r \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{u=1}^{k} N_u b_{ur}\right),$$

$$C_1 = (\alpha / A) \sum_{r=1}^{k} N_r \exp\left(-\sum_{u=1}^{k} N_u b_{ur}\right),$$

$$\beta = \alpha \exp\{-\sum_{u=1}^{k} (N_u a_u / A)\}.$$

Эти равенства надо рассматривать как асимптотические при условии, что A и все N_r безгранично возрастают. Автор подчеркивает, что полученные выражения зависят только от площади и периметра фигур, но в остальном не зависят от их формы (если не считать требования выпуклости). Доказательства проведены полностью. А. Я. Хинчин

См. также: 3541, 3782, 3803, 3852

ГЕОМЕТРИЯ

3882. Геодезические линии и пространство и время физических наблюдений. Уайт (Geodesics and the space and time of physical observations. Whyte L. L.), Brit. J. Philos. Sci., 1954, 4, № 16, 337—338 (англ.)

Выражается сомнение в том, что геодезические линии в искривленном мире общей теории относительности могут иметь прямое отношение к движению материальных тел. Х. П. К.

3883. О гильбертовом обосновании гиперболической геометрии. Сас (Über die Hilbertsche Begründung der hyperbolischen Geometrie. Szász Paul), Acta math. Acad. sci. hung, 1953, 4, № 3-4, 243—250 (нем.; резюме русс.)

Вносятся упрощения в обоснование гиперболической геометрии, предложенное Гильбертом (Основания геометрии, М., Гостехиздат, 1948, 229—247). Гильберт исходит из аксиом соединения, порядка, конгруэнтности и существования угла параллельности, не пользуясь аксиомой непрерывности. Автор использует построенное Гильбертом исчисление концов, строит из концов евклидову плоскость, отображает гиперболическую плоскость на верхнюю полуплоскость и при помощи этой интерпретации элементарно выводит основные теоремы гиперболической геометрии. И. Р. Шафаревич

3884. Этапы в обосновании плоской аффинной геометрии. Науман (Stufen der Begründung der ebenen affinen Geometrie. Naumann Herbert), Math. Z., 1954, 60, № 2, 120—141 (нем.)

Используя результаты Д. Гильберта (Основания геометрии, М., Гостехиздат, 1948, § 23, а также дополнение VI), автор из гильбертовых аксиом берет аксиомы связи I, 1—3, вычислительные аксиомы и аксиому параллельности IV* (в упрощенной форме). Положив в основание геометрической системы все или только часть из этих аксиом, он получает различные виды плоской аффинной геометрии. Таких видов приведено семь, смотря по тому, какой случай теоремы Паскаля или Дезарга будет присоединен к аксиомам 1,1—3, IV*. Доказательство независимости аксиом в каждом из разобранных случаев проводится с помощью моделей, преимущественно алгебраических. В. А. Яблоков

3885. О гипотезах, лежащих в основании геометрии. Риман (Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Riemann Bernhard), Phys. Bl., 1954, 10, № 7, 296—306 (нем.)

Сокращенное издание вступительной лекции Римана по случаю ее 100-летней годовщины (11 июня 1954 г.).

3886. Пояснения к вступительной лекции Б. Римана. Штрубеккер (Erläuterungen zur Habilitationsvorlesung von B. Riemann. Strubecker Karl), Phys. Bl., 1954, 10, № 7, 307—313 (нем.)

3887. Расширение некоторых известных теорем о треугольнике. Барлотти (Un'estensione di alcuni noti teoremi relativi al triangolo. Barlotti Adriano), Period. mat., 1954, 32, № 1, 35—37 (итал.)

Доказываются теоремы: 1) Если в n-угольнике биссектрисы $n - 1$ углов (медиатрисы $n-1$ сторон) проходят через одну и ту же точку, то и биссектриса n-го угла (медиатриса n-й стороны) проходит через эту точку. 2) Если в $(2n + 1)$-угольнике $2n$ высот (медиан) проходят через одну и ту же точку, то и $(2n + 1)$-я высота (медиана) проходит через эту точку.

А. С. Смогоржевский

3888. Недианы плоского треугольника. Сатерли (The nedians of a plane triangle. Satterly John), Math. Gaz., 1954, 38, № 324, 111—113 (англ.)

Отрезок прямой, соединяющий вершину треугольника с точкой, которая делит противоположную сторону его в отношении $1 : (n - 1)$, автор называет недианою треугольника. Каждому направлению обхода периметра треугольника соответствуют три недианы, ограничивающие треугольник недиан. Отношение суммы квадратов недиан к сумме квадратов сторон данного треугольника равно $(n^2 - n + 1)/n^2$. Отношение площади треугольника недиан к площади данного треугольника равно $(n - 2)^2/(n^2 - n + 1)$.

Отсюда при $n = 3$ получается известное предложение (Штейнгауз Г., Математический калейдоскоп, Гостехиздат, 1949, 9). К. К. Мокрищев

3889. Об изогональном центре. Конте (Sul centro isogono. Conte Luigi), Period. mat., 1954, 32, № 1, 32—34 (итал.)

На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC, как на основаниях, построены равнобедренные треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1, причем вершины A_1, B_1, C_1 последних расположены по отношению к вершинам A, B, C треугольника по разные стороны от его сторон.

Около равнобедренных треугольников описаны окружности O_1, O_2, O_3. Выводится соотношение

$$AV_1 + BV_1 + CV_1 = AA_1 - A_1V_1\left(1 - 2\sin\frac{\alpha_1}{2}\right),$$

где V_1 есть точка пересечения прямой AA_1 с окружностью O_1, а α_1 — угол при вершине A_1 равнобедренного треугольника BCA_1. Аналогичные соотношения можно вывести для отрезков BB_1 и CC_1 и углов β_1, γ_1 при вершинах B_1 и C_1. Полученные точки V_1, V_2, V_3 называются квазиизогональными центрами треугольника ABC.

Если $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=180°$, то три окружности O_i пересекаются в одной точке V. Если при этом $\alpha_1=\beta_1=\gamma_1=60°$, то квазиизогональные центры V_i совпадают с точкой V, которая становится изогональным центром треугольника. З. А. Скопец

3890. **Замечание по поводу углов многоугольника. Реньи** (Poznámka o úhlech mnohoúhelníka. Rényi Alfred), Časop. pěstov. mat., 1953, **78**, № 4, 305—306 (чеш.)

Методом математической индукции доказана теорема, предложенная Е. Чехом, что если углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ удовлетворяют неравенствам $0<\alpha_k<2\pi$ $(k=1, 2, 3, \ldots, n)$ и уравнению $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=(n-2)\pi$, то они являются углами плоского многоугольника. С. И. Зетель

3891. **Прямая и окружность Эйлера. Гливицкий** (Přímka a kružnice Eulerova. Glivický Josef), Mat.-přírodověd. rozhl., 1954, **33**, № 4, 119—123 (чеш.)

Во всяком треугольнике лежащие на прямой Эйлера центр описанной окружности, центр тяжести, центр окружности Эйлера и ортоцентр треугольника образуют гармоническую четверку точек. А. Н. Нахамовская

Примечание редакции. См. Зетель С. И., Новая геометрия треугольника, М., Учпедгиз, 1940, 32—34.

3892. **Об одной задаче о параллелограмме. Людвиг** (Eine Parallelogrammaufgabe. Ludwig Rudolf), Elem. Math., 1954, **9**, № 4, 81—82 (нем.)

С помощью векторов находится решение задачи: построить параллелограмм, подобный данному, так, чтобы стороны или их продолжения проходили через четыре произвольно данные точки общего положения. Если наперед не указаны пары точек, через которые должны проходить параллельные стороны, то задача имеет шесть решений. В. Ф. Рогаченко

3893. **Заметка о формуле Герона. Баллантайн** (Note on Hero's formula. Ballantine J. P.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 5, 337 (англ.)

Формула Герона для площади треугольника получается из формулы для тангенса половинного угла треугольника. С. И. Зетель

3894. **Определение объема гиперболоидного слоя элементарным путем. Ковач** (Hiperboloidrészek térfogatának meghatározása elemi úton. Kovács György), Mat. lapok, 1954, **5**, № 1, 10—22 (венг.; резюме русс., англ.)

При помощи метода приближений определяется объем тел, называемых в статье гиперболоидными слоями. Затем применением принципа Кавальери автор устанавливает связь между объемами специально выбранного цилиндра, полуэллипсоида и гиперболоидного сегмента. Резюме автора

3895. **Приведение уравнений кривых и поверхностей 2-го порядка к каноническому виду. Спейн** (The reduction of the conic and quadric to standard form. Spain B.), Math. Gaz., 1954, **38**, № 324, 136—137 (англ.)

Известно, что уравнение параболы $a_{ij}x_ix_j=0$ $(i, j=0, 1, 2,\ x_0=1)$ приводится к каноническому виду $(a_{11}+a_{22})Y^2=2\sqrt{-A'(a_{11}+a_{22})}\,X$, $A=\det|a_{ij}|$. Показывается, что $-A'(a_{11}+a_{22})>0$, и аналогично для приведения к каноническому виду уравнения параболоидов. С. И. Зетель

3896. **Фокусы конического сечения. Спейн** (Foci of a conic. Spain B.), Math. Gaz., 1954, **38**, № 324, 137 (англ.)

С помощью известного способа определения фокусов конического сечения, заданного общим уравнением в декартовых координатах, доказывается, что каждое коническое сечение имеет два действительных и два мнимых фокуса. В. Ф. Рогаченко

3897. **Центр кривизны конического сечения. Уокер** (The centre of curvature of a conic. Walker A. W.), Math. Gaz., 1954, **38**, № 324, 123—125 (англ.)

Для произвольной кривой устанавливается соотношение

$$\frac{R}{N}=1-\sin^2\alpha\,\frac{dx}{dr}\,\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dr}{dx}\right), \qquad (1)$$

где R — радиус кривизны, N — отрезок нормали, r — полярный радиус-вектор точки кривой относительно некоторой фиксированной точки O на горизонтальной прямой, x — расстояние точки кривой до вертикальной прямой, α — угол между радиусом-вектором и нормалью. Если за O принять фокус конического сечения, а за вертикальную прямую — соответствующую директрису, то (1) дает известное выражение для радиуса кривизны конического сечения:

$$R=N\cos^{-2}\alpha.$$

В заключение автор приводит, следуя Сальмону (Salmon, Conic sections, 6 ed., 1924), чисто геометрическую конструкцию для построения центра кривизны конического сечения. А. Г. Школьник

3898. **Определители и уравнения плоскости. Столл** (Determinants and plane equations. Stoll R. R.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 4, 255—256 (англ.)

Записывается в виде определителя уравнение плоскости, проходящей через две точки и ортогонально к заданной плоскости, а также уравнение плоскости, проходящей через заданную точку ортогонально к двум плоскостям. М. В. Потоцкий

3899 к. **Основания геометрии. Пхакадзе** (გეომეტრიის საფუძვლები. ფხაკაძე ა. ვ.), ტექნიკა და შრომა 380 стр., Изд-во «Техника да Шрома», Тбилиси, 1953, 9 р. 65 к. (груз.)

Подробное изложение основных разделов оснований геометрии. Содержание по главам: I. Историко-критический обзор исследований по основаниям геометрии. II. Абсолютная геометрия. III. Геометрия Евклида. IV. Геометрия Лобачевского. V. Тригонометрия Лобачевского и абсолютная тригонометрия. VI. Геометрия Римана (эллиптическая и сферическая системы). VII. Теория площадей. Указатель литературы. Г. С. Чогошвили

3900 к. **Лекции по векторному анализу. Шилов Г. Е.**, 138 стр. (Учеб. пособие для физ.-мат. фак. гос. ун-тов), М., Гостехиздат, 1954, 2 р. 65 к.

В книге изложены основы теории скалярного и векторного полей. Предполагается, что читатель знает векторную алгебру и теорию кратных интегралов в смысле Римана. Теория несобственных кратных интегралов дана в добавлении. Ясное и логически обоснованное изложение книги характеризуется рядом особенностей.

1. Основным дифференциальным операциям векторного анализа — градиенту, расходимости, вихрю — в книге даны прямые бескоординатные определения. Опираясь на это, автор при исследовании ряда вопросов расширяет класс допустимых векторных полей за рамки обычно рассматриваемых полей с дифференцируемыми составляющими.

2. В книге систематически используется понятие аддитивной функции области, что позволяет подходить с единой точки зрения к основным интегральным теоре-

лам векторного анализа как к теоремам о восстановлении аддитивной функции области по ее плотности.

3. На протяжении всей книги систематически рассматривается поле тяготения непрерывно распределенной массы и магнитное поле непрерывно распределенного тока. Эти поля используются и при построении поля по вихрю и расходимости, причем на последние не налагаются условия гладкости.

4. Криволинейные координаты в книге не применяются и соответствующие формулы для дифференциальных операций отсутствуют.

Материал распределяется по главам так: 1. Скалярные и векторные поля. Примеры. 2. Формула Остроградского и ее обобщение. 3. Аддитивные функции области и их плотности. 4. Градиент скалярного поля. 5. Поток и расходимость векторного поля. 6. Вихрь векторного поля. 7. Формула Стокса и ее применения. 8. Дифференцируемые поля. 9. Векторно-гладкие поля. 10. Гармонические поля. 11. Построение векторного поля по вихрю и расходимости. Добавление — несобственные кратные интегралы. Г. Ф. Лаптев

3901 К. Об основаниях интегральной геометрии. Видаль-Абаскаль (Sobre los fundamentos de la geometria integral. Vidal Abascal E., 28 pp., Real Academia de Ciencias Exacta, Fisicas y Naturales, Madrid, 1953, Bibliogr. hispánica, 1954, **13**, № 3, 7 (библ.)

3902 К. Векторный анализ. Вяйсяля (Vektorianalyysi. Väisälä K., 159 s. WSOY. sid 800:—), Suomen kirjakauppalehti, 1954, **57**, № 19, 425 (библ.)

3903 К. Учение о функциях и аналитическая геометрия. Хедстрём, Рендаль (Funktionslära och analytisk geometri. Allmän kurs och specialkurs. Hedström J., Rendahl C., 228 s., Stockholm, Sv. bokförl. (Bonnier), 1954, 5.25 kr.), Svensk bokhandel, 1954, № 30, 501 (библ.)

3904 Д. Угол и сумма углов в n-мерном евклидовом симплексе. Хён (Winkel und Winkelsumme im n-dimensionalen euklidischen Simplex. Höhn Walter, Diss. Zürich. Eidg. Techn. Hochsch., 1953, 38 S.), Vermessungstechnik, 1954, **2**, № 9, 178 (библ.)

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

3905. О поверхностях с легко определяемыми кривыми наибольшего уклона относительно данной плоскости. Кадержавек (O plochách se snadno stanovitelnými křivkami největšího spádu vzhledem k dané rovině. Kadeřávek František), Časop. pěstov. mat., 1953, **78**, № 4, 341—346 (чеш.)

Даются нетривиальные примеры поверхностей, на которых легко определяются кривые наибольшего уклона относительно данной плоскости α. Простейший пример: конус второго порядка, направляющей которого является произвольная парабола m, лежащая в плоскости ω, параллельной α, а вершиной — основание перпендикуляра, опущенного из фокуса параболы m на плоскость α. Тогда искомыми кривыми будут параболы, получаемые сечением указанного конуса плоскостями, параллельными образующей, направленной в вершину параболы m, и проходящими через прямые, лежащие в плоскости α и перпендикулярные к проекции оси параболы m на плоскость α. Приводится еще 5 более сложных примеров — поверхностей 4-го порядка. В. Ф. Рогаченко

3906. Проблема Кремона и ее применение к геометрической оптике. Паскали, Домингес (Un problema de Cremona y su aplicación a la óptica geométrica. Pascali Justo, Dominguez Pedro), Ingenieria, 1953, **57**, № 937, 266—274 (исп.)

Методом проективных пучков решается следующая задача: построить n-угольник, стороны которого проходят через заданные n точек и $(n-1)$ вершин которого лежат на заданных $(n-1)$ прямых; первая и последняя стороны многоугольника образуют заданный угол. Задача решается в предположении, что заданные прямые различны и каждая тройка заданных точек не лежит на одной прямой. В работе дано также исследование полученных решений.

Дано применение проблемы Кремона к решению следующей задачи геометрической оптики: световой луч, исходящий из некоторого источника A, последовательно отражается от n плоских зеркал; определить, как должен быть направлен луч, чтобы он образовал с лучом, отраженным от последнего зеркала, определенный угол.

Показано, какое значение эта задача имеет в различных вопросах, связанных с применением измерительных приборов (оптическая шкала, сектант, оптический угломер). А. И. Нахимовская

3907. Некоторые геометрические свойства центра давления. Парсонс (Some geometrical properties of the centre of pressure. Parsons H. W.), Math. Gaz., 1954, **38**, № 323, 42—44 (англ.)

Рассматривается положение центра давления плоской пластинкой, погруженной в тяжелую однородную жидкость, относительно системы прямоугольных координат, оси которой направлены по главным осям инерции, и относительно прямоугольной системы координат, фиксированной в пространстве, в следующих двух случаях:

Случай (а): Пластинка погружена вертикально и вращается вокруг центра тяжести. В этом случае геометрическое место центров давления в первой системе координат есть эллипс, а во второй — окружность. Отсюда, в частности, следует элементарное построение центра давления.

Случай (б): Центр тяжести двигается вертикально, вращения нет. Тогда центр давления перемещается по прямой линии относительно первой системы координат и по гиперболе относительно второй. Л. Я. Березина

3908. Функция напряжения Эйри в криволинейных координатах с приложением к равномерному прогибу спирально изогнутого бруса. Пистер (The Airy stress function in curvilinear coordinates with application to the uniform flexure of a naturally curved spiral beam. Pister Karl S.), J. Franklin Inst., 1954, **257**, № 1, 25—36 (англ.)

В части 1 рассматривается скалярная функция Эйри $\varphi(x, y)$ в плоской задаче теории упругости. Если линейный элемент плоскости (ξ, η) в произвольных, но ортогональных криволинейных координатах x, y имеет вид $ds^2 = g_{ij}dx^i dy^j$ $(i, j = 1, 2)$, то при отсутствии сил, приложенных к нему, напряжение имеет общий вид: $\tau_{i,j} = \delta^{mn}_{jp} g_{im} g^{pr} \Phi_{nr}$, где δ^{mn}_{jp} — обобщенная дельта Кронекера, g_{ij}, g^{ij} — ковариантная и контравариантная формы метрического тензора и запятая внизу обозначает ковариантное дифференцирование.

Подставляя τ_{ij} в уравнение статического равновесия тела, получаем как условие совместности уравнение для определения $\varphi(x, y)$:

$$\nabla^2\theta = 0, \text{ где } \theta = \sigma_x + \sigma_y, \nabla^2\theta = g^{ij}\theta_{,ij}, \sigma_x = \frac{\tau_{11}}{E}, \sigma_y = \frac{\tau_{22}}{G}.$$

Уравнение упрощается при введении изотермических координат. Если $E = G$, то $\theta = e^{-Q}(\varphi_{xx} + \varphi_{yy})$ и $\theta_{xx} + \theta_{yy} = 0$, где $Q = \log E$.

Изотермическая система координат для данной поверхности дает конформное отображение $\zeta = f(z)$,

$\zeta = \xi + i\eta$, $z = x + iy$, которое отображает $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ плоскости z в криволинейную сеть плоскости ζ. Компоненты метрического тензора выражаются через функцию отображения: $E = e^Q = \frac{d\zeta}{dz} \cdot \frac{d\zeta}{dz}$.

В части 2 рассматривается отображение $\zeta = e^{z(1-ik)/2}$, которое дает на плоскости два семейства ортогональных логарифмических спиралей, и тогда $Q = \log \frac{1+k^2}{4} + x + ky$, и исследуется равномерный прогиб бруса, края которого ограничены по логарифмической спирали. Все спиральные брусья могут быть определены при помощи двух параметров. Если при некотором значении k $x = 0$ определяет один продольный край, тогда другой край $x = \delta$ определяется углом $\beta = \frac{1+k^2}{2k}\delta$, на который надо повернуть первую спираль. Вычисление σ_x, σ_y, τ_{xy} приводит к уравнению совместности

$$\nabla^2 [e^{-(x+ky)}(\varphi_{xx} + \varphi_{yy})] = 0 \quad (\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$$

для определения φ.

Показывается, что частное решение вида $\varphi = f(x)$ находится из уравнения $f^{IV} - 2f'' + (1+k^2)f'' = 0$ и удовлетворяет краевым условиям: $\tau_{xy} = \sigma_x = 0$ для $x = 0$ и для $x = \delta$ при всех значениях y. Произвольные постоянные выражаются через k, δ и M_0 — момент относительно $(0, 0)$ равнодействующей сил в поперечном сечении бруса.

Вычисляются σ_x, σ_y через M_0 и показываются распределения изгибающего и срезывающего напряжений для типичного спирального бруса. Наконец, рассматриваются два предельных случая решения для спирального бруса: равномерный прогиб сектора круглого кольца (при $k \to 0$) и равномерный прогиб клина (при $k \to \infty$) под действием момента, приложенного в вершине. Эти решения известны. В. С. Люкшин

3909. Основы аналитической теории механизмов. Морошкин Ю. Ф., Тр. Семинара по теории машин и механизмов Ин-та машиноведения. АН СССР, 1954, **14**, № 54, 25—50

Пусть S и S^* — декартовы координатные системы, связанные со звеньями кинематической пары, и $q_1, \ldots, q_6$ — параметры, однозначно определяющие положение S^* относительно S. Если q_i удовлетворяют уравнениям

$$f_\mu(q_1, \ldots, q_6) = 0, \quad \mu = 1, \ldots, m,$$

и ранг матрицы $\| \partial f_\mu / \partial q_S \|$ есть k, то число $r = 6 - k$ называется рангом кинематической пары. Доказывается, что ранг пары не зависит от выбора систем S и S^*. Рангом кинематической цепи $S_0, \ldots, S_n$ называется число степеней свободы звена S_n в его движении относительно звена S_0. Показывается, что ранг цепи не зависит от выбора координатных систем, характеризующих положение звеньев.

Для решения задачи об определении положения звеньев кинематической цепи автор предлагает пользоваться приводимыми в статье формулами, представляющими собою подробную запись результатов умножения матриц преобразования декартовых координат.

Статье предпослан критический обзор литературы вопроса. В этом обзоре автор недооценивает значение работ других исследователей. С. Г. Кислицын

3910. Построение положений пространственных трехзвенных механизмов. Ротиняя Л. А., Тр. Семинара по теории машин и механизмов Ин-та машиноведения. АН СССР, 1953, **14**, № 53, 11—19

Методами начертательной геометрии проведены графические построения, позволяющие определить положения некоторых пространственных трехзвенных механизмов и траектории некоторых их точек. Построения основываются на решении следующих двух задач:

1) Плоскость P задана следами p_0 в некоторой системе проекции; построить следы этой же плоскости P в новой системе плоскостей проекций, повернутых относительно плоскостей первой системы на угол α.

2) Провести прямую, скрещивающуюся с данной прямой под заданным углом γ и находящуюся на заданном кратчайшем расстоянии от нее.

Построения проведены для пространственных трехзвенных механизмов четырех видов, содержащих следующие пары: 1) две пары 5-го класса и одну пару 1-го класса; 2) одну пару 2-го класса, одну пару 4-го класса и одну 5-го класса; 3) одну пару 5-го класса и две пары 3-го класса; 4) две пары 4-го класса и одну пару 3-го класса. М. Г. Серебренников

3911. Тензорный метод в теории пространственных механизмов. Кислицын С. Г., Тр. Семинара по теории машин и механизмов Ин-та машиноведения. АН СССР, 1954, **14**, № 54, 51—75.

Работа посвящена уравнениям между координатами кинематической цепи. За координатные параметры системы приняты параметры относительных движений ее звеньев. Положение звена S' относительно звена S определяется аффинором с комплексными (дуальными) линейными (тангенциальными, плюккеровыми) координатами $\alpha_{k\rho} = \alpha^0_{k\rho} + \omega\alpha^1_{k\rho}$, $k, \rho = 1, 2, 3$. Здесь $\alpha^0_{k\rho}$ — направляющие косинусы ортогонального трехгранника $O'X'_1X'_2X'_3$ звена S' относительно трехгранника $OX_1X_2X_3$ звена S, $\alpha^1_{k\rho}$ — моменты единичных векторов (винтов) системы S' относительно осей системы S, ω — символ Клиффорда, удовлетворяющий условию $\omega^2 = 0$. Таким образом, $\alpha_{k\rho}$ суть косинусы комплексных углов между осями систем S' и S. Уравнения преобразования, которые для замкнутой цепи играют роль уравнений геометрических связей, приводятся в виде аффинорных и матричных дуальных уравнений. Соответствующие матричные вещественные и скалярные дуальные и вещественные уравнения и уравнения кинематических пар отсутствуют. Приведены два примера, иллюстрирующие применение уравнений преобразования в исследовании конкретных механизмов. Предпослано введение, посвященное элементам алгебры тензоров с дуальными координатами. Следует отметить ошибку: в сноске стр. 57 смешиваются понятия о числе степеней свободы звена и о числе степеней свободы кинематической цепи.

Метод автора принципиально идентичен методу Ю. Ф. Морошкина (Докл. АН СССР, 1952, **82**, № 4, 533—536; 1953, **91**, № 4, 745—748; Тр. Семинара по теории машин и механизмов, 1954, **14**, № 54, 25—50), где уравнения даны в точечных координатах $\alpha^0_{k\rho}$, $x^{0'}_\rho$, k. Уравнения в точечных координатах более просты и имеют более простой геометрический смысл, однако в дуальных линейных координатах эти уравнения представляют предельно лаконичную форму основных уравнений геометрии механизмов. Ю. Ф. Морошкин

3912. Парабола безопасности. Грейссер (The parabola of surety. Graesser R. F.), Math. Mag., 1954, **27**, № 4, 204 (англ.)

Определяется огибающая однопараметрического семейства траекторий снаряда (парабол) при различном наклоне орудия к горизонту. Н. Г. Гаспарян

3913. Замечания к статье «Физические компоненты векторов и тензоров». Трусделл (Remarks on the paper, «The physical components of vectors and tensors». Truesdell C.), Z. angew. Math. und Mech., 1954, **34**, № 1/2, 69—70 (англ.)

Дополнительные замечания к предыдущей статье (РЖМат, 1954, 3794).

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3914. **Геометрический способ получения основных интерпретаций геометрии Лобачевского. Костин В. И.**, Сб. Матем. отд. физ.-матем. фак. Одесск. ун-та, 1953, **5**, 5—11

Отмечаются недостатки существующих способов получения основных интерпретаций геометрии Лобачевского и доказывается, что основные интерпретации геометрии Лобачевского порождаются в пространстве Лобачевского проектированием плоскости на предельную поверхность тремя типами связок прямых: интерпретация Бельтрами — Клейна — параболической связкой (этот факт установил Широков П. А., Геометрия Лобачевского и развитие ее идей, I, М.— Л., Гостехиздат, 1950, 67—76), интерпретация Пуанкаре 1-го рода — центральной связкой, интерпретация Пуанкаре 2-го рода — гиперболической связкой.

Указываются некоторые другие интерпретации, получающиеся в результате проектирования плоскости Лобачевского из собственной точки на плоскость, сферу, эквидистантную поверхность. Показывается, что интерпретация Пуанкаре 1-го рода может быть рассматриваема как предельный случай интерпретации на сфере. К. К. Мокрищев

3915. **О тригонометрии круговой модели Пуанкаре для гиперболической плоской геометрии. Сас** (Über die Trigonometrie des Poincaréschen Kreismodells der hiperbolischen ebenen Geometrie. Szász Paul), Acta math. Acad. sci. hung., 1954, **5**, № 1—2, 29—34 (нем.; резюме русс.)

Доказывается лемма: если через внутреннюю точку O круга радиуса r провести ортогональную окружность, пересекающую круг в точках U и V, то, разделяя угол $UOV = 2\beta$ пополам лучом OX, получим

$$\frac{\cos\beta}{\cos\lambda} = \frac{2r \cdot OP}{r^2 + OP^2},$$

где O — центр круга, а $\lambda = \angle XOP$.

Из этой леммы дается один из вариантов вывода тригонометрии для известной интерпретации Пуанкаре гиперболической геометрии на плоскости.

Р. М. Гейдельман

3916. **Неосуществимая конфигурация (10_3). Лауффер** (Die nichtkonstruierbare Konfiguration (10_3). Lauffer Rudolf), Math. Nachr., 1954, 11, № 4/5, 303—304 (нем.)

Дается простое доказательство неосуществимости (в геометрии над любым полем) единственной неосуществимой конфигурации (10_3) (Schroeter H., Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen, 1889, № 8, 193—236). Устанавливается, что в геометрии над любым некоммутативным телом эта конфигурация осуществима и приводится ее осуществление для тела кватернионов. Н. С. Рамм

3917. **Построение линии пересечения многогранников. Ширяев П. Е.**, Науч. зап. Одесск. политехн. ин-та, 1953, **1**, 89—92

Рассматривается вопрос о построении линии пересечения поверхностей двух многогранников. Применяя обычные для начертательной геометрии способы построения вершин искомой линии пересечения, автор предлагает записывать результат в форме таблицы. Последняя позволяет механизировать процесс соединения вершин линии пересечения и помогает установить видимость на чертеже отдельных ее звеньев.

Н. Ф. Четверухин

3918 К. **Проективная геометрия. Матеев Алиин Н.** (Проективна геометрия. Матеев Алиин Н., 160 с., С., Наука и изкуство, 1954, 6—63 лв.), Българ. книгопис, 1954, 58, № 9, 307 (библ.)

3919 Д. **Применение методов начертательной геометрии в некоторых дисциплинах курса высших технических учебных заведений. Феденко Н. А.** Автореф. дисс. канд. техн. н., Тбилисск. политехн. ин-т, Барнаул, 1954

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3920. **Некоторые замечания о плоских кривых 4-го порядка с симметричной точкой самоприкосновения. Барлотти** (Alcune osservazioni sulle quartiche piane dotate di un tacnodo simmetrico. Barlotti Adriano), Boll. Unione mat. ital., 1954, **9**, № 1, 55—58 (итал.)

Автор отмечает, что за последнее время в ряде исследований (Dalla Volta, Rend. Accad. Lincei, 1947, ser. 8, **3**, 301—303; Dedó, Period. mat., 1951, ser. 4, 29, 11—32; Gallarati D., Boll. Unione mat. ital., 1951, ser. 3, **6**, 215—218) привлекалось внимание к некоторым интересным свойствам плоских кривых 4-го порядка с двойными точками и с двойными касательными в них. В данной работе отмечаются аналогичные результаты для плоских рациональных кривых 4-го порядка с симметричной точкой самоприкосновения; эти результаты ставятся в связи с некоторыми свойствами пространственной кривой 4-го порядка с узлом. Точка самоприкосновения называется симметричной или гармонической (Сегре), если отношение кривизны двух ветвей в этой точке равно — 1.

Если кривая 4-го порядка Γ_4 имеет точку самоприкосновения O и узел A, то справедливы два предложения: а) если для кривой Γ_4 можно провести через A такие две хорды M_1M_2 и N_1N_2, что каждая из троек AM_1N_1 и AM_2N_2 находится на одной прямой, то точка самоприкосновения O будет симметричной;

б) если точка O самоприкосновения симметрична и четыре точки M_1, M_2, N_1, N_2 лежат на Γ_4, причем из четырех троек M_1M_2A, N_1N_2A, M_1N_1O, M_2N_2O три любые составлены из точек, лежащих на одной прямой, то четвертая тройка также состоит из точек, лежащих на одной прямой.

При доказательстве этих предложений используется квадратичное преобразование и свойства Γ_4, указанные Сегре и Кампеделли.

Пусть C_4 будет пространственная кривая 4-го порядка (2-го вида), гармоническая, т. е. имеющая узел P, и Q_2 — невырожденная квадрика, проходящая через C_4. Если из точки S на образующей, выходящей из P, стереографически проектировать Q_2, то изображением C_4 будет кривая 4-го порядка с узлом и точкой самоприкосновения. Если t_1, t_2 будут касательные к C_4 в точке P, а g_1, g_2 — образующие Q_2, выходящие из P, то предложения а) и б) переходят в следующие:

в) если на квадрике Q_2 существуют четыре образующих (по две из каждой системы), которые образуют косой четырехугольник, вписанный в C_4, то прямые g_1, g_2, t_1, t_2 образуют гармоническую четверку;

г) если в пучке квадрик, проходящих через C_4, существует такая Q_2, для которой $[g_1 g_2 t_1 t_2] = -1$, и взять две образующие, выходящие из точек пересечения C_4 и какой-либо образующей g, то эти образующие вторично пересекают C_4 в двух точках, лежащих на образующей g', принадлежащей той же серии, что и g.

Аналогичные более частные следствия из а) и б) автор получает, взяв вместо общей квадрики Q_2 конус 2-го порядка через C_4. С. С. Бюшгенс

3921. О модулях алгебраической кривой. Маронн (Sui moduli delle curve algebriche. Maroni Arturo), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 389—397 (итал.)

Пусть кривая рода p содержит линейные системы g_k^1 и g_h^1, $k \leqslant h$, без неподвижных точек. Если при h нечетном выполнено неравенство $p \geqslant \frac{1}{2}(h-1)k$ или при h четном выполнено неравенство $p \geqslant \frac{1}{2}hk - 1$ и если ни одна группа точек системы g_k^1 не имеет $k-1$ общих точек с группой системы g_h^1, то рассматриваемая кривая может содержать лишь конечное число систем g_k^1 и g_h^1. Число модулей, от которых зависит такая кривая, выражается формулой $N = 2h + 2k + p - 7 - \sum_i (s_i - 2)$, где суммирование распространяется на все группы из s_i точек, $s_i > 1$, общих некоторым группам из g_k^1 и g_h^1.

Если некоторые группы точек заданных систем g_k^1 и g_h^1 имеют $k-1$ общих им точек, то число систем g_h^1 бесконечно, а число модулей кривой равно $N = 2h + k + p - 5$. А. И. Узков

3922. Обобщение теоремы Клиффорда. Ладопулос (Une extension d'un théorème de Clifford. Ladopoulos Panaïotis D.), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 21, 2050—2051 (франц.)

Рассматривается сеть конических сечений. Пусть (C_i) — кривая сети, (C_{ij}) — кривая пучка $\{(C_i), (C_j)\}$, A_{ij} — четверка точек пересечения (C_i) и (C_j).

Точке M плоскости и четверке кривых сети ставится в соответствие тройка точек, являющаяся общей для шести кривых, определенных точкой M и каждой четверкой A_{ij} (ассоциированная тройка точек).

Если (C_i) $(i = 1, 2, 3, 4)$ принадлежат одной сети, то циркулярные кривые 4-го порядка (циркулярные квартики), содержащие группы четверок A_{ij}, A_{jk}, A_{ki} $(i, j, k = 1, 2, 3, 4)$, пересекаются в десяти точках, группирующихся в четверку M_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ (ассоциированная четверка) и две тройки, ассоциированные соответственно циклическим точкам плоскости относительно (C_i).

Следствие: если (C_{ik}), (C_{jk}) проходят через четверку, ассоциированную четверке кривых (C_i), то

$$\angle(C_{ik}, C_{jk}) = \angle(C_i, C_j) \pmod{\pi}.$$

Далее последовательно для $k = 2, 3, \ldots$ имеет место: а) $2k+1$ четверок точек, ассоциированных каждая одной из $2k+1$ систем S_{2k} $2k$ кривых, выделяемых из системы S_{2k+1}, принадлежат одной циркулярной квартике (циркулярная квартика, ассоциированная S_{2k+1}). б) $2k+2$ циркулярных квартик, ассоциированных каждая одной из $2k+2$ систем S_{2k+1}, выделяемых из системы S_{2k+2} $2k+2$ конических сечений, проходят через одну четверку точек (четверка, ассоциированная S_{2k+2}).

Доказательства формулированных фактов не приводятся. Г. С. Бархин

3923. Гиперсоприкасающиеся окружности к поверхности в точке и связанные с этим вопросы. Вакаро (Cerchi iperosculatori ad una superficie in un punto e questioni connesse. Vaccaro Giuseppe), Atti Accad naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1954, **16**, № 1, 35—41 (итал.)

Показывается, что число плоских сечений поверхности, проходящих через данную ее точку и обладающих в этой точке соприкасающимися 4-го порядка окружностями, равна 10, а не 12, как это утверждалось А. Корио (Corio A., Sopra una notevole famiglia di supergeodetiche, Atti. Accad. sci. Torino, 1952—53,87).

Вначале рассматривается произвольная алгебраическая поверхность F^n порядка $n \geqslant 3$ в евклидовом пространстве S_3, несущая на себе некоторую прямую C, причем ни одна точка этой прямой не является особой точкой поверхности. Проводя затем через C пучок плоскостей, автор находит линии Г пересечения их с поверхностью и устанавливает число тех линий, которые в точках их пересечения с прямой C имеют касание 3-го порядка со своими касательными. Отмечается влияние (на число таких сечений) наличия на C двойных точек поверхности, конических, бипланарных и т. д.

Если F^n подвергнуть инверсии с центром в рассматриваемой точке O, то она преобразуется в алгебраическую поверхность $\overline{F}^{2n-1}$, содержащую несобственную прямую O' плоскости, касательной к F^n в точке O. При этом циклические точки прямой O' будут $(n-1)$-кратными точками поверхности $\overline{F}^{2n-1}$. Автор определяет, как выше, число касательных 3-го порядка поверхности $\overline{F}^{2n-1}$ вдоль прямой O', которое оказывается равным числу плоских сечений поверхности F^n, проходящих через точку O и имеющих в этой точке соприкасающиеся 4-го порядка окружности. Найденное число равно 10.

В заключение та же задача решается с помощью иного приема. Рассматривается стереографическая проекция пространства S_3 на гиперсферу $\sum$ четырехмерного пространства S_4. При этом поверхность F пространства S_3 перейдет в некоторое многообразие F' на $\sum$, а число плоских сечений F, проходящих через точку P и обладающих в этой точке соприкасающимися 4-го порядка окружностями, будет равно числу плоскостей, имеющих с F' касание 4-го порядка. Произвольная поверхность из S_4 в любой своей точке имеет точно 10 плоскостей, имеющих с ней касание 4-го порядка. Это и является ответом на поставленный вопрос. Требование алгебраичности на поверхность F не накладывается. Н. И. Кованцов

3924. Исследование точек дирамации третьей категории кратной поверхности (третья заметка). Годо (Recherches sur les points de diramation de troisième catégorie d'une surface multiple (troisième note). Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1954, **40**, № 2, 81—86 (франц.)

Используются понятия и обозначения предыдущих работ автора (РЖМат, 1953, 1367).

Пусть Ф — поверхность, являющаяся образом циклической инволюции простого нечетного порядка p, действующей на алгебраической поверхности F и имеющей конечное число неподвижных точек. Пусть далее A — неподвижная точка поверхности F второго рода и третьей категории, A' — соответствующая ей точка дирамации поверхности Ф. Касательный конус в точке A' распадается на четыре рациональных конуса (σ_α), (τ_α), (τ_β), (σ_β), каждый из которых имеет общую образующую со следующим и предыдущим.

Отправляясь от линейной системы $|C_0'|$ сечений F гиперплоскостями, проходящими через A, автор рассматривает на F последовательность линейных систем $|C_0'|, |C_0''|, \ldots, |C_0^{(\nu)}|$ $(\nu = (p+1)/2)$, каждая из которых включает следующую. Кривые системы $|C_0^{(i)}|$

$< \nu$, касаются соответственно λ_i и μ_i раз неподвижных осей инволюции в касательном пространстве точки A, причем $\lambda_1 + \mu_1 < \lambda_2 + \mu_2 < \ldots < p$ и $\lambda_i + \alpha\mu_i \equiv 0 \bmod p$. Тогда необходимым и достаточным условием того, чтобы точка, бесконечно близкая к A и расположенная на общей образующей конусов (τ_α) и (τ_β), была двойной бипланарной (определение см. Godeaux L., Géometrie algebrique, 1948, 1, § 71), является условие $\lambda_2 = 2\lambda_1$, $\mu_2 = 2\mu_1$.

Исследуются также различные возможности в связи с поведением кривых системы $|C_0'''|$ в точке A, а также кривых системы $|C_0^{k+1}|$ в случае, когда $\lambda_i = i\lambda_1$; $\mu_i = i\mu_1$ $(i = 1,2, \ldots, k)$. И. З. Розенкноп

3925. Замечания в связи с классификацией иррегулярных поверхностей. Андреотти (Osservazioni intorno alla classificazione delle superficie irregolari. Andreotti Aldo), Atti IV congr. Unione mat. Ital., 1953, 2, 263—264 (итал.)

С алгебраической поверхностью F иррегулярности q связаны два многообразия Пикара, одно V_q — в смысле Севери и другое V_q' — в смысле Кастельнуово. Если F не имеет граней рода q, то она допускает преобразованную рациональную поверхность Φ, вложенную в V_q. Ставится вопрос: когда соответствие $F \to \Phi$ является бирациональным? Если дана F иррегулярности $q \geqslant 3$, лишенная граней рода q, а ее отображение Φ свободно от кратных точек, то необходимым и достаточным условием того, чтобы соответствие $F \to \Phi$ было бирациональным, является требование, чтобы F и Φ имели одно и то же число σ Севери в случае, когда F неэллиптична, а в случае эллиптичности F, чтобы она не имела кратных эллиптических кривых в пучке рода $q - 1$ эллиптических кривых.

Точнее, отображение F на Φ кратно: 1) когда Φ и F обе эллиптические и F имеет кратные кривые в пучке рода $q - 1, 2)$ когда Φ имеет кручение и $\sigma_F < \sigma_\Phi$, и только в этих случаях. Оба эти случая эффективно возможны.

Доказательства в статье не приводятся.

С. Д. Россинский

3926. Проблема редукции особенностей алгебраического многообразия. Зариский (Le problème de la réduction des singularités d'une variété algébrique. Zariski O.), Bull. sci. math., 1954, ser. 2, 78, 31—40 (франц.)

Резюме доклада, прочитанного в Париже в 1953 г., не претендующего на полное решение проблемы, но указывающего возможный путь ее решения.

Чистое (несмешанное) многообразие (м.) V_r размерности r подчиняется «условиям вложения»: 1. $V_r \subset F_{r+1} = F_r \times S_1$, где F_r — неособенное м., а S_1 — проективная прямая. 2. Ограничение на V_r проектирования F_{r+1} на F_r отображает V_r на F_r: $T(V_r) = F_r$; T^{-1} отображает каждую точку F_r в конечное число точек V_r. Если n — максимум этого числа («степень» T), то место V_{r-1} точек F_r, которым отвечает менее чем n точек V_r, называется критическим м., ассоциированным V_r. В последующем на V_r налагается более сильное условие: $F_{r+1} = S_1 \times \ldots \times S_1$ и V_r правильно вложено в F_{r+1}, т. е. каждое из последовательно определяемых критических м. $V_{r-1}, V_{r-2}, \ldots$ удовлетворяет условиям вложения (для случая м. в S_{r+1} условие правильного вложения не является дополнительным ограничением). Точка Q м. W называется нормальным пересечением, если Q принадлежит лишь двум неприводимым компонентам $W - W_1$ и W_2, причем для каждого из них Q — простая точка и касательные пространства к W_1 и W_2 в Q независимы.

Проблема редукции сводится к доказательству основной теоремы: Если V_r удовлетворяет условиям вложения и все особенности V_{r-1} — нормальные пересечения, то существует такое бирациональное преобразование φ, что особенности $\varphi\{V_r\}$ — только нормальные пересечения. Если эта теорема доказана, то простая индукция по r дает теорему редукции: Если чистое м. V_r правильно вложено в $F_{r+1} = S_1 \times \ldots \times S_1$, то найдется такое бирациональное предобразование φ, что все особенности $\varphi(V_r)$ — только нормальные пересечения. Для доказательства основной теоремы автор предполагает, что V_r неприводимо и аналитически неприводимо в каждой точке. Впрочем, доказательство, основанное на теории локальных колец, ведется лишь для нормальных V_r и в некоторых частях лишь скиццируется. В его процессе каждой особой точке P м. V относятся два целочисленных характера: ранг $m(P)$ $(m \geqslant 2)$ и $s(P)$ $(1 \leqslant s \leqslant m, (s, m) = 1)$. Место S особых точек V распадается на неприводимые компоненты без особенностей и не имеющие общих точек; для всех точек каждой такой компоненты m и s постоянны. Если

$$\frac{m}{s} = h_1 + \cfrac{1}{h_2 + \ldots + \cfrac{1}{h_n}}$$

— разложение $\frac{m}{s}$ в непрерывную дробь, то дилатация м. V с центром W переводит W в несколько неприводимых м., число которых равно числу h_i с четным индексом, большим единицы. Каждому такому h_i соответствует неприводимая компонента W^1, для которой $m(P') = h_i$, $s(P') = 1$. В силу $h_i < m$ происходит редукция ранга, чем доказывается основная теорема. Отсюда следует также, что редукция особенностей V требует не более двух последовательных моноидальных преобразований для каждой неприводимой компоненты S.

Автор полагает, что проблема редукции в общем случае может быть сведена к более простой задаче отделения ветвей, именно, что проблема редукции будет решена, если будет доказана следующая теорема: Если V_r неприводимо и вложено в неособенное G_{r+1}, то найдется такое бирациональное преобразование φ, что $\varphi(V_r)$ аналитически неприводимо в каждой точке.

В. В. Морозов

3927. Замечание о пределе применимости постуляционной формулы для алгебраического многообразия. Севери (Un'osservazione sul limite d'applicabilità della formula di postulazione per una varietà algebrica. Severi Francesco), Atti Accad. Ligure, 1952, 9, 23—28 (итал.)

Постулация для примали порядка l неприводимого многообразия V_d в S_r, или гильбертова характеристическая функция ассоциированного ей простого идеала, является при $l \geqslant l_0$ полиномом степени d от l. В этой работе автор изучает случаи, в которых возможно указать верхнюю границу для l_0. В частности, если V_d и все его производящие сечения линейными пространствами различных размерностей арифметически нормальны в смысле Зарисского, то $l_0 \leqslant m - d - 1$. Та же оценка имеет место для алгебраических нормальных поверхностей при единственном условии их несингулярности.

D. B. Scott

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 2, 154.

3928. Соотношения эквивалентности в алгебраической геометрии. Снаппер (Equivalence relations in algebraic geometry. Snapper Ernst), Bull. Amer. Math. Soc., 1954, 60, № 1, 1—19 (англ.)

Статья содержит обзор основных понятий современной алгебраической геометрии многообразий с точки зрения различных соотношений эквивалентности (алгебраическая, линейная и рациональная эквивалентности), которые можно ввести в группы циклов.

Автор дает некоторые методические и литературные указания для лиц, самостоятельно изучающих алгебраическую геометрию. М. М. Постников

3929 К. Алгебраическая геометрия. Лефшец (Algebraic geometry. Lefschetz Solomon, IX + 233 p., Princeton, N. J., Princeton University Press, 1953, 5.00 doll.) (англ.)

Книга Лефшеца является обработкой лекций, которые автор читал в 1935—1938 гг. и которые вышли тогда в литографированном издании. Как говорится в предисловии, автор ставил себе целью перекинуть мост между аналитическим и алгебраическим методами в алгебраической геометрии, опираясь в основном на метод формальных степенных рядов.

Чтение книги (за исключением ее последней главы) не требует предварительных знаний по алгебраической геометрии.

Изложение местами довольно сжатое. В качестве введения могут быть полезны: «Алгебраические кривые» Уокера и отчасти «Методы алгебраической геометрии» Ходжа и Пидо т. II, ч. III.

После того как в гл. I перечисляются основные алгебраические понятия (поля, кольца, идеалы, дифференциалы) и факты, используемые в дальнейшем, в гл. II излагаются основные понятия, относящиеся к алгебраическим многообразиям: идеал, поле функций, общая точка и размерность многообразия, касательное пространство и особые точки. Для пересекающихся лишь по точкам n гиперповерхностей в n-мерном пространстве вводится понятие кратности точки пересечения (при помощи результантов) и доказывается теорема Безу.

Гл. III посвящена теории преобразований — рациональных, бирациональных и алгебраических. В связи с этим излагаются моноидальные представления многообразий и их обобщения.

В гл. IV излагается теория степенных рядов от многих переменных в применении к алгебраическим многообразиям. Некоторые основные теоремы, о которых речь была выше, формулируются без доказательства. Изучаются идеалы в кольце степенных рядов и алгеброидные многообразия, т. е. многообразия определяемые приравниванием к 0 системы степенных рядов. Неприводимое алгебраическое многообразие V, определенное в пространстве координатами $(x_1, \ldots, x_n)$ и проходящее через точку $A\,(a_1, \ldots, a_n)$, является в то же время алгеброидным многообразием, определенным степенными рядами от $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$. Разложение его на неприводимые компоненты приводит к понятию ветвей V в точке A. Изучаются их размерности и свойства, связанные с пересечением. Показывается, что в случае комплексного основного поля неприводимое алгебраическое многообразие является связным множеством, а в случае, если оно не имеет особых точек, то ориентируемым топологическим многообразием.

Гл. V и VI содержат теорию алгебраических кривых и линейных рядов на них, включая теорему Римана — Роха, а гл. VII — теорию абелевых дифференциалов с применениями к эллиптическим и гиперэллиптическим кривым. Здесь затронуты приблизительно те же вопросы, что и в «Алгебраических кривых» Уокера. Начиная с гл. V и до конца книги основное поле предполагается алгебраически замкнутым и характеристики 0.

Гл. VIII посвящена теореме Абеля. Автор придает ей форму, пригодную для произвольного поля (с указанными ограничениями).

В качестве приложения рассматривается теория алгебраических соответствий между кривыми и, в частности, кривой с самой собой. Каждому соответствию сопоставляется линейное преобразование пространства абелевых дифференциалов 1-го рода, которое оно порождает. Соответствие имеет валентность (целую) γ, если это преобразование есть γ-кратное единичного. Рассматриваются только соответствия с валентностью и таким образом исключаются из рассмотрения сингулярные соответствия классической теории. Доказывается формула Кели — Брилля $u = \mu + \mu^* + 2\gamma p$ для числа неподвижных точек $u\,(\mu, \mu^*)$-значного соответствия с валентностью γ на кривой рода p.

Гл. IX содержит основы теории систем кривых на поверхностях. Она во многих местах примыкает к книге автора «L'analysis situs et la géometrie algébrique» Paris, 1924 и может служить введением в эту гораздо менее доступно написанную книгу.

Каждому одномерному замкнутому дифференциал $\omega_1 = Rdx + Sdy$ на поверхности и кривой C, на которой ω_1 становится бесконечным, ставится в соответствие вычет $\lambda = \lambda(C)\ \omega_1$ на C, определяемый тем, что для любой функции V на поверхности, имеющей на C нуль 1-го порядка, существует такая функция W, что $\omega_1 - dW - \lambda U^{-1}\,dU$ регулярен на C. Если $\lambda(C) \neq 0$, то C называется логарифмической кривой ω_1. Доказывается теорема Пикара, согласно которой у любой поверхности есть такое число ρ, что для любой системы из $\rho + 1$ кривой существует замкнутый дифференциал, имеющий кривые этой системы и только их своими полярными кривыми. (Минимальное число ρ называется числом Пикара поверхности.) Она выводится из второй теоремы Пикара. Фактор-пространство пространства двойных дифференциалов $Rdxdy$ 2-го рода по подпространству полных дифференциалов

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\ dy$$

имеет конечную размерность ρ_0. Далее формулируется теорема автора (в случае комплексного основного поля $\rho + \rho_0$ совпадает с двумерным числом Бетти поверхности) и теорема Севери (число Пикара ρ совпадает с максимальным числом линейно независимых кривых на поверхности в смысле алгебраической эквивалентности). Из этого выводится теорема Севери, согласно которой кривые $C_1, \ldots, C_\rho$ тогда и только тогда образуют линейный базис в смысле алгебраической эквивалентности совокупности всех кривых поверхности, когда определитель $|(C_i \cdot C_j)|$, составленный из их точек пересечения, имеет минимальное значение.

Из всех книг, с которых можно начинать изучение алгебраической геометрии, книга автора, по мнению референта, подводит ближе всего к классическим результатам этой теории. И. Р. Шафаревич

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

3930. Вращающиеся кривые внутри вращающихся кривых. Гольберг (Rotors within rotors. Golberg Michael), Amer. Math. Monthly, 1954, 61, № 3, 166—171 (англ.)

Доказывается, что кривую Рибокура можно непрерывно вращать в описанной около нее эвольвенте делтоиды, т. е. гипоциклоиды с тремя остриями. Крив

Рибокура задается в параметрической форме уравнениями

$$x = \frac{4b}{3}(3\cos\theta - \cos^3\theta),$$

$$y = \frac{4b}{3}\sin^3\theta,$$

эвольвента дельтоиды — уравнениями

$$x = \frac{b}{3}\left(8\sin\theta + 2\sin\theta - \sin 4\theta,\right)$$

$$y = \frac{b}{3}(8\cos\theta - 2\cos 2\theta + \cos 4\theta).$$

Доказываются также известные теоремы о том, что кривую Рибокура можно непрерывно вращать в описанном равностороннем треугольнике, а эвольвенту дельтоиды — в квадрате. А. И. Сирота

3931. **О параболах, рассматриваемых как кривые Γ′.** Арвесен (Sur les paraboles, considérées comme des courbes Γ′. Arvesen Ole Peder), Kgl. norske videnskab. selskab. forhandl., 1953, **26**, № 20, 85—88 (франц.)

Применяя терминологию и результаты своих предыдущих работ (Kgl. norske videnskab. selskab. forhandl, 1940, 12, № 24, 32), автор рассматривает различные разложения параболы, заданной в тангенциальных координатах, на геометрические суммы простейших составляющих. М. А. Акивис

3932. **О линейчатых и развертывающихся поверхностях вращения.** Кламкин (On ruled and developable surfaces of revolution. Klamkin Murray S.), Math. Mag., 1954, **27**, № 4, 207—208 (англ.)

Автор показывает, что единственными линейчатыми поверхностями вращения являются однополостный гиперболоид вращения, прямой круговой цилиндр и прямой круговой конус. Последние две поверхности являются единственными развертывающимися поверхностями вращения. Н. В. Лактанова

3933. **О линейчатых поверхностях.** Битти (On ruled surfaces. Beatty S.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 3, 176—179 (англ.)

Рассматривается линейчатая поверхность, образующие которой являются мгновенными осями вращения подвижного триэдра произвольной пространственной кривой. Определяются уравнения образующей, касательная плоскость, а также стрикционная линия этой поверхности.

Пусть $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ будут единичные векторы триэдра, k, τ — кривизна и кручение кривой, $\dot{\boldsymbol{t}} = k\boldsymbol{n}$, $\dot{\boldsymbol{b}} = \tau\boldsymbol{n}$ (точка означает производную по длине при s кривой),

$$1/r^2 = k^2 + \tau^2,\ T = \tau r.$$

Относительно триэдра радиус-вектор центральной точки образующей будет $kr^2\boldsymbol{n}$, вектор направления образующей $\boldsymbol{l} = \tau^2 r^2 \boldsymbol{t} - k\tau r^2 \boldsymbol{b}$; тангенциальный вектор стрикционной линии коллинеарен с вектором

$$T\,ds\boldsymbol{l} + d(kr^2)\boldsymbol{n}.$$

Н. А. Алумяэ

3934. **Об одном необходимом и достаточном условии того, чтобы точка поверхности была точкой округления.** Голомб (Sur une condition nécessaire et suffisante d'ombilicité d'un point de surface. Gołąb S.), Roczn. Polskiego towarz. mat (Ann. Soc. polon. math.), 1952, **25**, 140—144 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.)

Автор доказывает, что равенство нормальных кривизн линий кривизны в точке правильной поверхности трехмерного пространства является необходимым и достаточным условием того, чтобы эта точка была точкой округления. Н. В. Лактанова

3935. **К теории кривых на поверхности, имеющих касание порядка k (заметка вторая).** Франкс (Sur la théorie des courbes qui appartiennent à une surface et y ont un contact d'ordre k (Deuxième note). Franckx Ed.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1954, **40**, № 2, 125—129 (франц.)

Возьмем в трехмерном евклидовом пространстве множество кривых $E^{(k)}$, имеющих в точке M прикосновение порядка k, и подмножество $E^{(k+1)}$ с порядком прикосновения $k+1$. Кривые подмножества $E^{(k+1)}$ подчиняются двум независимым условиям на кривизну ρ и кручение r: $d^{k-1}\rho/ds^{k-1}$ и $d^{k-2}r/ds^{k-2}$, где s — длина дуги,— локальные инварианты. При $k=1$ второе условие заменяется совпадением соприкасающихся плоскостей.

Выделим из $E^{(k)}$ частные подмножества кривых $E_s^{(k)}$ и $E_s^{(k+1)}$ с порядками прикосновения k и $k+1$, лежащих на поверхности, для которой точка M обыкновенная. Если $k=1$, то выделение $E_s^{(k+1)}$ из $E_s^{(k)}$ влечет за собой только одно условие.

Сокращение числа условий до одного имеет место при всяком k (РЖМат, 1954, 3064).

Основная теорема: Для множества $E_s^{(k)}$ кривых либо одно из количеств $d^{k-1}\rho/ds^{k-1}$, $d^{k-2}r/ds^{k-2}$ есть локальный инвариант, либо эти величины связаны линейным соотношением одного и того же вида для всех $k \geqslant 2$:

$$\frac{d^{k-1}\rho}{ds^{k-1}}\cos\theta + \frac{d^{k-2}r}{ds^{k-2}}\rho\sin\theta = c_k,$$

где θ есть угол между главной нормалью кривой и нормалью к поверхности и c_k характеризует выбор семейства $E_s^{(k+1)}$. При $k=1$ получается классический случай Менье.

В формулах встречаются опечатки. К. Н. Тихоцкий

3936. **Конгруэнции W с псевдосферической фокальной полостью, конгруэнции Гишара и изометрические поверхности Фосса.** Йонас (W-Strahlensysteme mit einem pseudosphärischen Brennflächenmantel, Guichardsche Kongruenzen und isometrische Voßsche Flächen. Jonas Hans), Math. Nachr., 1954, **11**, № 1—2, 105—128 (нем.)

Пусть (x, y, z) — псевдосфера, отнесенная к асимптотическим линиям (α, β), с кривизной $K=-1$; X, Y, Z — ее сферическое изображение; $X^{(1)}, Y^{(1)}, Z^{(1)}$ и $X^{(2)}, Y^{(2)}, Z^{(2)}$ — кординаты векторов, касательных к линиям кривизны. $\alpha - \beta = \text{const}$, $\alpha + \beta = \text{const}$. Имеют место следующие формулы:

$$2\theta_{\alpha\beta} = \sin 2\theta, \tag{1}$$

$$dx = (\cos\theta X^{(1)} - \sin\theta X^{(2)})\,d\alpha + (\cos\theta X^{(1)} + \sin\theta X^{(2)})\,d\beta,$$

$$dX = (-\sin\theta X^{(1)} - \cos\theta X^{(2)})\,d\alpha + (-\sin\theta X^{(1)} - \cos\theta X^{(2)})\,d\beta,$$

$$x = (Y, Z) = \int[(YZ_\alpha - ZY_\alpha)\,d\alpha - (YZ_\beta - ZY_\beta)\,d\beta], \tag{2}$$

$$X_{\alpha\beta} = \cos 2\theta X. \tag{3}$$

Поверхность (x) получаемая из (x) преобразованием Ли с постоянной c, определяется в тех же параметрах (α, β), принадлежит тому же решению $\theta(\alpha, \beta)$ уравнения (1) и имеет $K=-1$; ее линии кривизны $(c^2\alpha - \beta)/c = \text{const}$, $(c^2\alpha + \beta)/c = \text{const}$.

Примем (x) за фокальную поверхность конгруэнции W. Если R — решение уравнения Мутара (3), то ξ_1 — нормальный вектор ко второй фокальной полости — определяется согласно (2):

$$\xi_1 = \frac{1}{R}(R, X).$$

Полагая

$$R\xi_1 = \lambda X_\alpha + \mu X_\beta + \nu X,$$

приходим к абсциссе второго фокуса x_1:

$$x_1 = x + \eta_1 Z - \zeta_1 Y =$$

$$= x - \frac{\lambda - \mu}{R}\cos\theta X^{(1)} + \frac{\lambda + \mu}{R}\sin\theta X^{(2)},$$

где R, λ, μ, ν связаны некоторыми дифференциальными соотношениями. Подобным же образом строится вторая конгруэнция W' с фокусами $\bar{x}$ и

$$\bar{x}_1 = \bar{x} - \frac{\lambda - \mu}{R}\cos\theta\bar{X}^{(1)} + \frac{\lambda + \mu}{R}\sin\theta\bar{X}^{(2)}.$$

Лучи конгруэнции W' составляют с линиями кривизны на поверхности $(\bar{x})$ те же углы, что и углы лучей конгруэнции W с линиями кривизны на поверхности (x). Такое преобразование автор назвал азимутальным.

Конгруэнция W с псевдосферической фокальной полостью и с постоянным средним параметром $a\,(|a|>1)$ переводится азимутально с постоянной

$$c = \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}$$

в конгруэнцию с фокальной полостью $(\bar{x})$, все лучи которой параллельны одной плоскости.

С конгруэнцией W на псевдосфере связана конгруэнция Гишара, определяемая формулами:

$$x^F = \lambda X_\alpha + \mu X_\beta,$$

$$\hat{x} = \lambda X_\alpha + \mu X_\beta + hX,$$

$$\overset{\vee}{x} = \lambda X_\alpha + \mu X_\beta + kX,$$

где x^F — абсцисса основания F перпендикуляра, опущенного из начала координат O на луч конгруэнции Гишара, $\hat{x}$, $\overset{\vee}{x}$ — абсциссы фокусов, h, k — расстояния их от F. h, k удовлетворяют уравнению (3). OF параллелен касательной к (x), перпендикулярной к лучу W. Если конгруэнция W с постоянным средним параметром, то F делит отрезок $h-k$ в постоянном отношении.

Поверхности Фосса, принадлежащие конгруэнции Гишара, являются огибающими плоскостей, перпендикулярных к лучам и делящих расстояние между фокусами в постоянном отношении.

Отсюда без квадратур, с помощью расстояния касательной плоскости от начала O определяется поверхность Фосса, у которой сферическое изображение $(\bar{X})$ получено из (X) преобразованием Ли с постоянной c.

Семейство наложимых друг на друга поверхностей Фосса, сферические изображения которых имеют сродство Ли, подвергается бигармоническому преобразованию (Jonas H., Ann. mat. pura ed appl., 1924, **1**, 309), а их сферическое изображение — преобразованию Бэклунда B_σ.

К. Н. Тихоцкий

3937. О φ-конгруэнциях. Упадхяй (On φ-congruences. Upadhyay M. D.), J. Math. Soc. Japan, 1953, 5, № 1, 95—104 (англ.)

Конгруэнция называется конгруэнцией φ, если ее лучи пересекаются с соответствующими лучами другой данной конгруэнции под постоянным углом φ. За исходную поверхность берется геометрическое место линий сжатия фиксированных линейчатых поверхностей данной конгруэнции. С помощью квадратичных форм Кумера и Санния выводятся формулы для вычисления 1) расстояния от центральной точки линейчатой поверхности φ-конгруэнции до ее исходной поверхности 2) параметра распределения линейчатой поверхности φ-конгруэнции.

Рассмотрены некоторые частные случаи: 1) $\varphi = 0$ 2) $\varphi = \pi/2$, 3) первоначальная конгруэнция изотропная.

Н. В. Лактанов

3938. Поверхности, у которых асимптотические линии обоих семейств принадлежат линейным комплексам. Штрубеккер (Le superficie, le cui asintotiche dei due sistemi appartengono a complessi lineari. Strubecker Karl), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 441—445 (итал.)

Поверхности Φ, у которых асимптотические линии обоих семейств принадлежат линейным комплексам, распадаются на 3 класса: поверхности Φ_I, Φ_{II}, Φ_{III}. Поверхности Φ_I изучены Бианки и Терračини. Автор дает аналитическое представление поверхностей всех трех классов.

1. В эллиптическом пространстве для поверхности Φ_I:

$$x_0 = 1 + uv + (1 + uv)UV' + 2U(V - vV') + 2V(U - uU'),$$

$$x_1 = v - u + (v - u)U'V' + 2(UV' - VU'),$$

$$x_2 = U' - V' - uv(U' - V') + 2(Uv - Vu),$$

$$x_3 = 2(U - V) - (u + v)(U' - V').$$

2. В квазиэллиптическом пространстве для поверхности Φ_{II}:

$$x_0 = 1 + uv,$$

$$x_1 = v - u,$$

$$x_2 = U' - V' - uv(U' - V') + 2(Uv - Vu),$$

$$x_3 = 2(U - V) - (u + v)(U' - V').$$

3. В изотропном пространстве для поверхности Φ_{II}:

$$x_0 = 1,$$

$$x_1 = v - u,$$

$$x_2 = U' - V',$$

$$x_3 = 2(U - V) - (u + v)(U' - V').$$

Здесь u и v — параметры асимптотических линий поверхностей Φ, U — функция только u, V — функция только v.

Н. В. Лактанов

3939. Квадрика Вильчинского. Мак-Куин (The quadric of Wilczynski. MacQueen M. L.), Tennessee Acad. Sci., 1953, 28, № 4, 285—286 (англ.)

Поверхность проективного пространства, асимптотические линии которой приняты за координатные, определяется уравнениями

$$x_{uu} = px + \theta_u x_u + \beta x_v,$$

$$x_{vv} = qx + \gamma x_u + \theta_v x_v \qquad (\theta = \log\beta\gamma).$$

Прямые $l_1(a, b)$, $l_2(a, b)$ являются взаимными в обыкновенной точке x поверхности, если прямая l_1 соединяет точки x и $y = -ax_u - bx_v + x_{uv}$ и прямая l_2 соединяет точки $\rho = x_u - bx$, $\sigma = x_v - ax$. Линии ρ_v и $\sigma\sigma_u$ пересекают линию l_1 соответственно в точках

$$(ab - b_v)x + y, \quad (ab - a_u)x + y.$$

Точка, гармонически сопряженная точке x относительно этих двух точек, имеет локальные координаты

$$x_1 = ab - \frac{1}{2}(a_u + b_v), \quad x_2 = -a, \quad x_3 = -b, \quad x_4 = 1 \ldots (1)$$

Теорема. Если прямая l_1 является осью пучка соприкасающихся плоскостей гипергеодезических линий для пучка сопряженных сетей поверхности, то геометрическое место точек (1) образует квадрику Вильчинского.

Н. В. Лактанова

3940. К теории кривых на поверхности, имеющих касание порядка k (заметка третья). Франкс (Sur la théorie des courbes qui appartiennent à une surface et y out un contact d'ordre k (Troisième note). Franckx Ed.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1954, 40, № 3, 262—265 (франц.)

Все кривые на поверхности в евклидовом пространстве, имеющие касание порядка k в данной точке, имеют в этой точке одинаковые значения нормальных кривизн и геодезических кручений, а также всех их производных по длине дуги до $(k-1)$-го порядка включительно. Это непосредственно следует из инвариантности вектора $d^k\overline{n}/ds^k$, доказанной в предыдущей заметке автора (РЖМат, 1954, 3064). Р. Н. Щербаков

3941. Некоторые тройки пространственных кривых в проективно-дифференциальной геометрии. Дальмассо (Particolari terne di curve sghembe in geometria proiettiva differenziale. Dalmasso Liana), Boll. Unione mat. ital., 1954, 9, № 1, 66—73 (итал.)

Если в трехмерном проективном пространстве пару кривых $y(t)$ и $z(t)$, у которых соответственные касательные не пересекаются, а точки одной кривой не инцидентны соответствующим соприкасающимся плоскостям другой, рассматривать как пару направляющих линейчатой поверхности (y, z), то, задав последнюю уравнениями Вильчинского

$$y'' = l_1y' + l_2z' + l_3y + l_4z,$$
$$z'' = m_1y' + m_2z' + m_3y + m_4z,$$

инвариант пары t^*, введенный Барнером (Barner M., Math. Z., 1952, 56, № 4, 409—422), можно представить в виде $t^* = \int \sqrt{l_2m_1}\,dt$. Тройка кривых, имеющих попарно равные инварианты t^*, называется ассоциированной тройкой первого (если соответствующие точки лежат на одной прямой) или второго (в противном случае) рода. Определяется необходимое и достаточное условие того, что данная пара кривых $y(t)$ и $z(t)$ может быть включена в ассоциированную тройку. В случае тройки первого рода оно имеет вид: $(l_2m_1)^{3/2} \pm i\,[l_2m_1' - l_2'm_1 + l_2m_1(l_1 - m_2)] = 0$, а третья кривая C_0 имеет уравнение $u = \pm\, im_1^{1/2}y + l_2^{1/2}z$. Для данной направляющей на данной линейчатой поверхности можно найти ∞^2 других направляющих, каждая из которых вместе с данной может быть включена в ассоциированную тройку первого рода. Если в качестве кривых пары взять одну и ту же пространственную кривую γ третьего порядка $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = t^3 : t^2 : t : 1$, то для того чтобы эту пару можно было включить в ассоциированную тройку первого рода, соответствие $\vartheta(t)$ между точками пары должно быть проективитетом, инвариант которого a удовлетворяет уравнению $4a^2 + 7a + 7 = 0$. Кривая C_0 также является кривой третьего порядка. Она проходит через двойные точки проективитета и имеет в них общие с γ касательные и соприкасающиеся плоскости, а инварианты Б. Сегре (Segre B., Rend. Accad. Lincei, 1935, 22, ser. 6, № 9—10) в обеих точках равны $-\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{8}$.

Р. Н. Щербаков

3942. К проективно-дифференциальной геометрии плоской 3-ткани кривых. Егер (Zur projektiven Differentialgeometrie der ebenen Kurven-3-Gewebe. Jeger M.), Math. Z., 1954, 60, № 2, 112—119 (нем.)

Плоская 3-ткань кривых может быть задана, как совокупность нуль-линий кубической дифференциальной формы с коэффициентами p_{ijk}, симметричными по всем индексам, и положительным дискриминантом D. В предыдущей работе автора (Comment. math. helv., 1950, 24, 260—290) показано, что данную 3-ткань можно включить с произволом в одну функцию двух аргументов в квазигеодезическую систему линий. Каждая такая система определяет класс аффинных перенесений со связностями Γ_{ij}^k. Эти перенесения (они получаются друг из друга геодезическими преобразованиями — см. Схоутен И. А., Стройк Д. Дж., Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. 2, М., Изд-во иностр. лит-ры, 1948, 193) автор называет проективно-эквивалентными. Тензор $T_{krs}^{hl} = \frac{1}{\sqrt{Dg^3}} p_k^{hl} g^{ij} \nabla_{[r} p_{s]ij}$, где g^{ij} служит основным тензором и имеет компонентами определители матрицы

$$\begin{pmatrix} p_{111} 2p_{112} p_{122} \\ p_{112} 2p_{122} p_{222} \end{pmatrix},$$

а символ дифференцирования ∇ определяется обычным образом через связности Γ_{ij}^k, является инвариантом ткани, отнесенной к определенной включающей ее квазигеодезической системе. Тензор $T_{ks}^h = T_{krs}^{hr}$ называется тензором погружения ткани, обращение его в нуль характеризует ангармоническую квазигеодезическую систему, т. е. систему линий, касательные к которым образуют постоянные сложные отношения с касательными к кривым ткани. Условия того, что ткань, определенная кубической формой с коэффициентами p_{ijk}, погружается в квазигеодезическую систему, соответствующую связностям Γ_{ij}^k, получаются исключением ковектора u_i из соотношений $\nabla_{(h} p_{ijk)} = u_{(h} p_{ijk)}$.

Р. Н. Щербаков

3943. Замечания о тканях. Бляшке (Osservazioni sui tessuti. Blaschke Wilhelm), Rend. Circolo mat. Palermo, 1953, 2, № 1, 36—39 (итал.)

В некоторой области R плоскости с точечными координатами x, y даны три семейства кривых $u_j \equiv u_j(x, y) = \text{const}$, $j = 1, 2, 3$, с отличными от нуля в этой области якобианами $\frac{\partial(u_j, u_k)}{\partial(x, y)} \neq 0$, $j \neq k$. Уравнениями $u_j = \text{const}$ определяется в R тройная «текстильная» сеть кривых, короче — ткань. Исключив из этих уравнений x и y, получаем уравнение ткани $T(u_1, u_2, u_3) = 0$. Обратно, подобное уравнение при условии $\frac{\partial T}{\partial u_j} \neq 0$ определяет некоторую ткань с точностью до «произвольных» точечных преобразований. Изучение этих тканей и их свойств, инвариантных при таких преобразованиях, совпадает в основном с так называемой технической номографией.

Когда дана ткань, то соответствующие функции T являются определенными с точностью до преобразований трех следующих типов:
1. Замена шкал для трех семейств кривых:

$$T'(u_1', u_2', u_3') = T(u_1(u_1'), u_2(u_2'), u_3(u_3')).$$

2. Умножение T на некоторую произвольную функцию $H(u_1, u_2, u_3) \neq 0$:

$$T'' = HT.$$

3. Замена T произвольной функцией от T, т. е.

$$T''' = F(T), \text{ где } F(0) = 0, F'(0) \neq 0.$$

Изучается поведение формы Пфаффа

$$\gamma = \sum_1^3 \left(\frac{\partial}{\partial u_j} \lg T_j \right) du_j, \qquad (1)$$

называемой связью ткани при преобразованиях 1, 2, 3. Во всех трех случаях связь γ остается инвариантной с точностью до некоторого аддитивного полного дифференциала $\gamma^* = \gamma + df$, а значит, для внешних дифференциалов имеем $D\gamma^* = D\gamma$.

Тождество $D\gamma = 0$ означает, что полученные «шестиугольные» ткани эквивалентны тем, которые образованы тремя семействами параллельных прямых.

Формула (1) для связи ткани и выражение для ее внешнего дифференциала $D\gamma$ обобщаются автором на случай любого числа измерений $n > 2$. Для ткани поверхностей в пространстве S_3 даны связь γ ткани и выражение для $D\gamma$. Тождество $D\gamma = 0$ показывает здесь, что, например, три семейства поверхностей $u_1, u_2, u_3 = \text{const}$ высекают на каждой поверхности $u_0 = \text{const}$ шестиугольную ткань кривых. Поэтому автор называет такую ткань поверхностей также «шестиугольной тканью». Этот геометрический результат, как указывает автор, связан с именем Дюбурдье (Dubourdieu J., 1929; см. книгу Blaschke W., Bol G., Geometrie der Gewebe, Berlin, 1938). С. Д. Россинский

3944. Поперечные производные полей кривых и поверхностей. Узаков Ю. К., Тр. Среднеаз. ун-та, 1953, № 36, 87—99

Вектор $\overrightarrow{AA_1}$ неизменной длины ε соединяет точки A и A_1 двух смежных кривых поля. Пусть $\overrightarrow{AA_1} = \varepsilon \vec{S}^*$, где $\vec{S}^* = \vec{S}^*(\alpha_i^*)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Вектор $\vec{S}(\alpha_i)$, где $\alpha_i = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \alpha_i^*$, назовем поперечной касательной к полю.

Когда поле кривых задано в явном виде $H_k(x_i) = h_k$ $(k = 1, \ldots, n-1)$, координаты α_i единичного вектора $\vec{S}(\alpha_i)$ производной определяются системой $\sum_{i=1}^n \frac{\partial H_k}{\partial x_i} \alpha_i = g_k$, где $g_k = \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \Delta h_k \to 0}} \frac{\Delta h_k}{\varepsilon}$. Даются необходимые и достаточные условия существования вещественной поперечной касательной и исследуются случаи двух и трех измерений.

Если поле кривых задано дифференциальным уравнением $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, то вектор $\vec{S}(\alpha, \beta)$ определяется системой $\frac{\partial F}{\partial y} \xi + \frac{\partial F}{\partial y'} \xi' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \xi^{(n)} = 0$, $\alpha^2 + (y'\alpha + \xi)^2 = 1$, где $\xi = \beta - y'\alpha$. Необходимое и достаточное условие существования $\vec{S}$ имеет вид: $y'^2\xi^2 - (1 + y'^2)(\xi^2 - 1) \geqslant 0$. Л. Я. Березина

3945 К. Курс дифференциальной геометрии. Т. 2. Добреску (Curs de geometrie diferentială. Vol. 2. Dobrescu Andrei. 144 p. Bucureşti, f. e. Curs litografiat, 1954). Bul. bibliogr. cartii, 1954, А3, № 18, 9 (библ.)

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

3946. Об одном геометрическом месте. Льорente Гонсалес (Nota sobre un lugar geometrico. Llorente González Félix), Gac. mat., 1954, **6**, ser. 1, № 3—4, 62—63 (исп.)

Если x_i — расстояние точки X до прямых r_i, λ_i и $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — константы, то геометрическое место точек X, удовлетворяющих уравнению $\Sigma_{i=1}^n x_i\lambda_i = k$, есть прямая (теорема двумерной геометрии). Ф. В. Широков

3947. Тензорные поверхности, эллипсы и круги. Бергер (Tensorflächen, Tensorellipsen und Tensorkreise. Berger Erich R.), Österr. Ing.-Arch., 1954, **8**, № 4, 231—236 (нем.)

Рассматривается симметрический тензор A в трехмерном пространстве и связанные с ним 4 «тензорные поверхности» — центральные поверхности 2-го порядка $A(x, x) = 1$, $A^{-1}(x, x) = 1$, $A^2(x, x) = 1$, $A^{-2}(x, x) = 1$. Выясняются взаимоотношения между этими поверхностями и их применения в механике (эллипсоиды напряжений Ламе и Коши, эллипсоид инерции, гирационный эллипсоид и др.). Для двумерного случая приводятся также кинематические способы построения тензорного эллипса и круга напряжений Кульмана и Мора.

Ф. Р. Гантмахер

3948. О гауссовой кривизне действительных минимальных поверхностей в R_4. Пинль (Über die Gaußsche Krümmung der reellen Minimalflächen im R_4. Pinl M.), Monatsh. Math., 1954, **58**, № 1, 27—34 (нем.)

Приводится доказательство двух теорем о невозможности существования минимальной поверхности постоянной отрицательной кривизны в R_3 (первая теорема и R_4 (вторая теорема). В доказательстве первой теоремы допущена ошибка: соотношение $d\omega = Kd\sigma$ (K — полная кривизна, $d\sigma$, $d\omega$ — ориентированные элементы поверхности и ее сферического отображения) использовано в форме $|d\omega| = K|d\sigma|$. Аналогичная ошибка допущена во второй теореме. В обоих случаях доказательства теряют силу. И. В. Пыганков

3949. Обобщение уравнений Кодацци для подпространства риманова пространства. Сингал, Бехари (Generalization of Codazzi's equations in sub-space imbedded in a Riemannian manifold. Singal M. K., Behari Ram), Math. Student, 1954, **22**, № 1, 31—36 (англ.)

Находится обобщение уравнений Петерсона—Кодацци—Риччи для подпространства V_n риманова пространства V_m, заданного вместе с $m - n$ конгруэнциями кривых таких, что через каждую точку V_n проходит одна кривая каждой конгруэнции. Полученные уравнения приводятся к известным уравнениям Петерсона — Кодацци—Риччи для V_n в V_m в случае, когда конгруэнции кривых ортогональны к V_n. Ю. Е. Пензов

3950. Замечание о вписанных последовательностях Лапласа. Годо (Remarque sur les suites de Laplace inscrites dans une suite de Laplace. Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1954, **40**, № 2, 87—90 (франц.)

Дается обобщение известного понятия вписанных последовательностей Лапласа в проективном пространстве S_n. Если фокусы одной последовательности Лапласа L' лежат на соответствующих лучах другой последовательности L развертывающиеся поверхности

оследовательностей L и L' соответствуют, то последовательность L' вписана в последовательность L. Присоединим к последовательности L пространства $S_m\,(m<n)$, пределяемые $m+1$ соседними фокусами L. Два пространства S_m сопряжены, если среди фокусов L, оторые их определяют, имеется m общих.

При этих условиях: если два соседних фокуса L' ринадлежат двум сопряженным пространствам S_m оследовательности L, то любые два соседних фокуса $'$ обладают тем же свойством.

Из этой теоремы следует, что при $m=1$ последовательность L' вписана в последовательность L в обычном мысле слова.

Если $m>1$, то последовательность L' вписана в последовательность L в обобщенном смысле. В. И. Коровин

951. Об одном типе векторных пространств. Сен (On a type of vector space, Sen R. N.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1953, 19, № 4, 475—486 (англ.)

Чтобы построить абстрактно-алгебраическую схему сновных фактов теории параллельных площадок в вазиримановых пространствах, автор использует аксиоатику конечномерного векторного пространства V_n ад полем комплексных чисел с билинейной симметриеской невырождающейся метрикой (допускающей тличные от нуля векторы с нулевой длиной). Аксиоатически определяется оператор, относящий упорядоенной паре (a, b) векторов из V_n вектор того же ространства. Аксиомы выбраны так, чтобы оператор оответствовал абсолютному дифференцированию вектоого поля b^* риманова пространства в направлении ектора a^*. Новых результатов не получено.

А. М. Лопшиц

952. Транзитивные группы движений римановых пространств V_5. Телеман (Grupurile de mişcare transitive ale spaţiilor riemanniene V_5. Teleman C.), Studii şi cercetări mat., 1953, 4, № 3—4, 503—526 (рум.; резюме русс., франц.)

Отыскиваются стационарные подгруппы возможных ранзитивных групп движений пятимерных римановых ространств V_5. Присоединяя к операторам этих подупп операторы сдвигов, автор находит из тождеств кобн структуры транзитивных групп движений. Далее, а основании уравнений Маурера — Картана для каждой олученной структуры по способу Г. Врэнчану (Vrănanu Gh., Studii şi cercetări mat., 1953, 4, № 1—2) пределяются линейные элементы пространств $V_5\,(ds^2>0)$, опускающих транзитивную группу движений рассмативаемой структуры. В частности, выясняются свойства олученных пространств и соответствующих им групп ижений. И. П. Егоров

953. О деформированных римановых пространствах. Сугури (On deformed Riemannian spaces. Sugiri Tsuneo), Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Univ., 1953, A8, № 1, 43—55 (англ.)

Рассматривается риманово пространство V_n с метрическим тензором g_{ij} и инфинитезимальное преобразование $\overline{x}^i = x^i + \varepsilon\zeta^i(x)$. Риманово $\overline{V}_n$ с метрическим тензором $\overline{g}_{ij} = g_{ij} + Dg_{ij}$, где D есть символ дифференциа Ли для данного инфинитезимального преобразова-я, называется пространством, деформированным из посредством этого преобразования. Каждому тензору .. в V_n ставится в соответствие деформированный нзор $\overline{T}^{\cdots}_{\cdots} = T^{\cdots}_{\cdots} + DT^{\cdots}_{\cdots}$ в $\overline{V}_n$. При этом все вычисля проводятся с точностью до малых первого порядка, е. члены с ε^2 отбрасываются.

Если V_n является: а) пространством постоянной ривизны, б) пространством Эйнштейна, в) симметрическим, г) проективно-евклидовым, д) конформно-евклидовым,— то деформированное $\overline{V}_n$ будет обладать этими же свойствами. Если группа голономии V_n оставляет инвариантными m-мерную плоскость или $m+1$ линейно независимых векторов, то указывается класс деформаций, при которых группа голономии $\overline{V}_n$ обладает теми же свойствами. Кроме того, устанавливается, что гармоничное векторное или тензорное поле в V_n деформируется в такое же поле пространства $\overline{V}_n$, и доказывается, что производная Ли тензорного гармоничного поля будет сама гармоничной тогда и только тогда, если соответствующее ей инфинитезимальное преобразование является движением V_n. А. П. Широков

3954. О локально изгибаемых римановых многообразиях полного пространства. Лемуан (Sur les variétés riemanniennes localement déformables d'un espace complet. Lemoine Simone), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 21, 2052—2053 (франц.)

Рассматривается риманово пространство V_n, полное в смысле Хопфа и Ринова (Hopf H., Rinow W., Comment. math. helv., 1931, 3, 209—225), со всюду положительно определенной метрикой, и погруженное риманово многообразие V_{n-1}, полное по отношению к индуцированной в нем метрике. Свойства полных пространств позволяют сопоставить каждой точке $x \in V_n$ непустое множество $\Delta(x)$ точек, состоящее из: а) бесконечно удаленных точек геодезических, проходящих через x, б) таких точек ξ, лежащих на геодезических, проходящих через x, что ξ — первая точка, за которой (в оригинале «для которой») длина дуги геодезической перестает быть равной расстоянию $x\xi$. При этом учитывается неограниченная продолжаемость геодезических полного пространства.

При $n>3$ существование изгибаемых V_{n-1} является исключительным и связано с наличием в них вполне геодезических V_{n-3}, все эйлеровы кривизны которых равны нулю. Они имеют непустое пересечение с каждым $\Delta(x)$.

В случае односвязного V_4 постоянной положительной кривизны $\Delta(x)$ сводится для любой точки x к противоположной ее точке.

Отсюда получается теорема: В четырехмерной сфере всякое локально изгибаемое V_3, полное в метрике, индуцированной его погружением, необходимо содержит противоположную к каждой из своих точек.

Также утверждается, что в локально евклидовом ($n>3$) или локально гиперболическом ($n=4$) полном V_n всякое локально изгибаемое и полное V_{n-1} имеет бесконечно удаленную область. Предполагается, что уравнения погружения V_{n-1} в V_n принадлежат классу C^6.

Работа связана с предыдущей статьей того же автора (C. r. Acad. sci., 1954, 238, 559). В. В. Рыжков

3955. Аналитические свойства тензора кривизны в финслеровом пространстве. Рунд (On the analytical properties of curvature tensors in Finsler spaces. Rund Hanno), Math. Ann., 1954, 127, № 1, 82—104 (англ.)

В финслеровом пространстве F_n, определяемом интегралом

$$\int F(x,\, x')\,\mathrm{d}x,$$

с каждой точкой $P(x)$ можно связать пространство Минковского с определяющей функцией $F(x, \xi)$. Если в F_n задано векторное поле $X(x)$, то ковариантное дифференцирование его из точки $P(x)$ в точку $Q(x+dx)$ определяется формулой

$$DX^i = (\partial X^i / \partial x^k + P^{*i}_{hk}(x,\, x')\, X^h)\, dx^k,$$

где

$$x' = dx/ds,\ ds = F(x,\ dx),\ P^{*i}_{jk} = g^{ih} P^{*}_{jk,\ h},$$

$$g_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial x'^i\, \partial x'^j},\ P^{*}_{ij,\ h} = \Sigma_\omega [jk,\ h],\ (\omega = 0,\ 1,\ 2),$$

$[ik,\ h]^0$ — символы Кристофеля для тензора g_{ij},

$$[ik,\ h]^\alpha = \frac{1}{2}\left(\overset{(\alpha)}{\Gamma}_{kh,\ j} + \overset{(\alpha)}{\Gamma}_{jh,\ k} - \overset{(\alpha)}{\Gamma}_{jk,\ h}\right)(\alpha = 1,\ 2),$$

$$\overset{(1)}{\Gamma}_{jk,\ h} = -\frac{\partial g_{jk}}{\partial x'^i} g^{il} [ph,\ l]^0 x'^p,$$

$$\overset{(2)}{\Gamma}_{jk,\ h} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x'^i} g^{im} \overset{(1)}{\Gamma}_{hm,\ q} x'^q.$$

Аналитически проверяется, что DX^i — вектор, а ковариантная производная $X^i_{,k} = \partial X^i / \partial x^k + P^{*i}_{hk} X^h$ — тензор.

Если же вектор или тензор зависит не только от точки, но и от направления $T_{ij} = T_{ij}(x,\ x')$, то его ковариантная производная определяется следующим образом:

$$T_{ij,\ h} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^h} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^k}{\partial x^h} - T_{kj} P^{*k}_{ih} - T_{ik} P^{*k}_{jh}.$$

Величины $\partial x' / \partial x$ определяются или 1) если геометрическая задача задает в каждой точке вектор $x' = f(x)$, как производные $\partial f / \partial x$ (относительное ковариантное дифференцирование) или 2) из соотношения

$$\partial x'^i / \partial x^k = -P^{*i}_{lk} x'^l,$$

которое является уравнением геодезической, проходящей через точки $P(x)$ и $Q(x + dx)$ (абсолютное ковариантное дифференцирование). $Dg_{ij} = \partial g_{ij} / \partial x'^k\, Dx'^k$ и равняется нулю только для абсолютного дифференцирования.

Для обоих случаев вводится кривизна K^i_{hmn} формулой

$$X^i_{nm} - X^i_{mn} = K^i_{hmn} X^h.$$

Этот тензор кривизны кососимметричен по двум последним нижним индексам и удовлетворяет обобщенным тождествам Бианки. Для абсолютного дифференцирования, если $K^i_{hmn} = 0$, уравнения параллельного перенесения любого вектора $DX^i = 0$ вполне интегрируемы, функция F не зависит от x и соответствующее пространство — пространство Минковского. Дивергенция обобщенного тензора Эйнштейна $G^j_h = K^j_h - \frac{1}{2}\delta^j_h K$, где K^j_h и K определяются обычным образом из K^i_{hmn} и g_{ij}, равняется нулю.

М. В. Васильева

3956. Конгруэнтное вложение в F-метрические пространства. Вальд (Congruent imbedding in F-metric spaces. Wald A.), Pacif. J. Math., 1954, 4, № 2, 305—315 (англ.)

F-метрическим пространством называется множество S, с каждой парой x, y элементов («точек») которого ассоциирован элемент xy^2 поля F («квадрат расстояния»), удовлетворяющий требованиям:

а) $xy^2 = yx^2$, б) $xx^2 = 0$, в) для $x \neq y$ найдется по крайней мере один элемент $z \in S$, такой, что $xz^2 \neq yz^2$.

Пространством $F_n(a_1, \ldots, a_n)$ называется F-метрическое пространство, «точки» которого суть упорядоченные совокупности $(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)$ n чисел поля F (характеристики 0), причем квадрат расстояния определяется равенством

$$xy^2 = \sum_{i=1}^n a_i (x_i - y_i)^2,\ a_i \subset F.$$

При $a_i = 1$ имеем пространство E_n. По определению порядок конгруэнтности $F_n(a_1, \ldots, a_n)$ равен $n + 1$, если любое F-метрическое пространство может быть вложено в $F_n(a_1, \ldots a_n)$ с сохранением квадрата расстояния при условии, что это справедливо для любой совокупности $n + p$ точек F-метрического пространства.

При этих условиях пространство $F_n(a_1, \ldots, a_n)$ имеет порядок конгруэнтности $n + 3$ для всех F-метрических пространств, построенных на поле с характеристикой 0.

Н. Н. Яненко

3957. Характеристика многообразий Келера с помощью параллельных полей плоскостей. Патерсон (A characterisation of Kähler manifolds in terms of parallel fields of planes. Patterson E. M.), J. London Math. Soc., 1953, 28, part 3, № 111, 260—269 (англ.)

Эрмитово многообразие размерности m рассматривается как действительное дифференцируемое многообразие M^{2m} размерности $2m$ с положительно определенной римановой метрикой, удовлетворяющее условиям 1) в M^{2m} задано множество действительных координатных систем такое, что переходя от действительных координат x^a $(a = 1, \ldots, 2m)$ к комплексным координатам $z^\alpha = x^\alpha + ix^{n+\alpha}$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$, мы получаем, что каждая пара полученных таким образом комплексных координатных систем будет определять регулярное аналитическое преобразование комплексных переменных z^α; 2) компоненты метрического тензора G_{ab} относительно данных действительных координатных систем удовлетворяют условиям

$$G_{\alpha\beta} = G_{n+\alpha,\ n+\beta};\ G_{n+\alpha,\ \beta} = -G_{\alpha,\ n+\beta},$$

имеющим инвариантный характер, т. е. тензору G_{ab} в комплексных координатных системах будет соответствовать эрмитов тензор $g_{\alpha\beta'}$.

Автор строит несимметричный тензор P_{ab}, определяемый уравнениями

$$P_{\alpha\beta} - P_{n+\alpha,\ n+\beta} = G_{\alpha\beta} + iG_{\alpha,\ n+\beta};$$

$$P_{n+\alpha,\ \beta} = -P_{\alpha,\ n+\beta} = G_{n+\alpha,\ \beta} - iG_{\alpha\beta},$$

ранг которого равен m, и рассматривает в M^{2m} два поля комплексных m-плоскостей в касательных пространствах, определяемые соответственно уравнениями $P_{ab}\lambda^b = 0$ и $P_{ab}\mu^a = 0$, которые оказываются комплексно сопряженными и состоящими из нулевых m-плоскостей. Для того чтобы эрмитово многообразие M^{2m} было многообразием Келера, т. е. чтобы компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta'}$ относительно комплексных координатных систем удовлетворяли условию $\partial g_{\alpha\beta'} / \partial z^\gamma = \partial g_{\gamma\beta'} / \partial z^\alpha$, необходимо и достаточно, чтобы рассматриваемые поля комплексных m-плоскостей были параллельны с точки зрения обычного параллельного перенесения векторов в M^{2m}.

Далее автором доказана теорема: Если M^{2m} — дифференцируемое многообразие класса C^2, в котором существует непрерывное поле нулевых m-плоскостей в касательных пространствах, параллельное относительно параллельного перенесения векторов, определяемого заданной в M^{2m} положительно definитной римановой метрикой, то в M^{2m} можно ввести комплексную аналитическую структуру, т. е. выделить множество координатных систем, определяющих далее комплексные координатные системы, таким образом, что M^2 будет многообразием Келера.

Автору, повидимому, неизвестна работа Б. А. Розенельда «Об унитарных и расслоенных пространствах» Гр. Семинара по вектори. и тензорн. анализу Н.-и. -та матем. при МГУ, 1949, 7, 260—275), в которой еория расслоенных пространств П. К. Рашевского приенена к теории эрмитовых пространств и из которой епосредственно следуют полученные им результаты.

В. В. Вагнер.

958. **Эрмитовы пространства в геодезическом соответствии. Уэстлейк** (Hermitian spaces in geodesic correspondence. Westlake W. J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 2, 301—303 (англ.)

Рассматривается n-мерное комплексное пространство n с эрмитовой метрикой

$$ds^2 = g_{ij}dz^i dz^j \ (i, j, k = 1, \ldots, n, \bar{1}, \ldots, \bar{n};\ g_{ij} = g_{ji}),$$

оторая имеет вид:

$$ds^2 = 2\,g_{\alpha\bar{\beta}}\,dz^\alpha\,dz^{\bar{\beta}} \qquad \left(\alpha, \beta = 1, \ldots, n;\ \bar{\alpha}, \bar{\beta} = \bar{1}, \ldots, \bar{n}\right),$$

де $z^{\bar{\beta}} = \overline{z^\beta}$ (черта означает комплексную сопряженость). Матрица $g = \| g_{\alpha\bar{\beta}} \|$ является невырожденной рмитовой матрицей: $g = \bar{g}'$, $\mathrm{Det} \mid g \mid \neq 0$.

Линейная связность эрмитова пространства определяется объектом связности Γ^i_{jk}; где

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = g^{\alpha\bar{\lambda}}\frac{\partial g_{\beta\bar{\lambda}}}{\partial z^\gamma}, \quad \Gamma^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}\,\bar{\gamma}} = \overline{\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}},$$

стальные Γ^i_{jk} — нули. Здесь $\| g^{\alpha\bar{\lambda}} \| = g^{-1}$.

Тензор кручения связности $S^i_{jk} = \frac{1}{2}(\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj})$.

ространство с нулевым тензором кручения автор называет келеровым, хотя оно еще раньше изучалось . А. Широковым (РЖМат, 1954, 4904).

Геодезические линии H_n определяются дифференциальными уравнениями

$$\frac{d^2z^i}{dt^2} + E^i_{jk}\frac{dz^j}{dt}\frac{dz^k}{dt} - \frac{dz^i}{dt}\left(\frac{d^2s}{dt^2}\Big/\frac{ds}{dt}\right) = 0,$$

де E^i_{jk} — символы Кристофеля метрического тензора j.

Автор находит необходимые и достаточные условия ого, чтобы два эрмитовых пространства H_n и H'_n находились в геодезическом соответствии, т. е. чтобы уществовало такое отображение одного пространства на ругое, при котором геодезические H_n отображались геодезические линии H'_n. Такими условиями оказываются:

$$n\,\Gamma^{1\alpha}_{(\beta\gamma)} + \delta^\alpha_{(\beta}S'_{\gamma)} = n\Gamma^\alpha_{(\beta\gamma)} + \delta^\alpha_{(\beta}S_{\gamma)},$$

$$ng'^{\alpha\bar{\lambda}}g'_{\gamma\bar{\nu}} - S'^{\bar{\nu}}_{\bar{\lambda}}{}_{\bar{\beta}} + \delta^\alpha_\gamma S'_{\bar{\beta}} = ng^{\alpha\bar{\lambda}}g_{\gamma\bar{\nu}} - S^{\bar{\nu}}_{\bar{\lambda}}{}_{\bar{\beta}} + \delta^\alpha_\gamma S_{\bar{\beta}}$$

Здесь скобки означают симметрирование, штрих над основной буквой относит ее к пространству H'_n, а $S_\gamma = S^\alpha_{\gamma\alpha}$.

В случае келерова пространства K_n $S^i_{jk} = 0$, и необходимым и достаточным признаком геодезического соответствия K_n и K'_n является

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma'^\alpha_{\beta\gamma},$$

ем автор исправляет неточность, допущенную при рассмотрении этого вопроса Коберном (Coburn N., Bull. Amer. Math. Soc., 1941, 47, 901—910), на которую еще раньше указал Бохнер (Bochner S., Bull. Amer. Math. Soc., 1947, 53, 179—195).

Из результата автора легко следует доказанное Коберном утверждение, что пространство K_n нельзя геодезически отобразить на H_n.

Г. И. Кручкович

3959. **О некоторых эрмитовых многообразиях. Апте** (Sur certaines variétés hermitiques. Apte Madhumálati), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 10, 1091—1093 (франц.)

Рассматривается многообразие V_{2n} аналитической комплексной структуры. Аналитические комплексные координаты обозначаются (z^α, z^{α^*}), где $\alpha = 1, \ldots, n$; $\alpha^* = \alpha + n$. На рассматриваемом многообразии определен ковариантный, симметрический тензор с комплексными компонентами $g_{\alpha\beta^*}$ $(g_{\alpha\beta} = 0)$, определяющий эрмитову метрику $ds^2 = 2g_{\alpha\beta^*}\,dz^\alpha \wedge dz^{\beta^*}$. К многообразию присоединяется внешняя квадратичная форма $F = ig_{\alpha\beta^*}dz^\alpha \wedge \wedge dz^{\beta^*}$, определяемая на V_{2n} кососимметрическим тензором F_{ij}, компоненты которого удовлетворяют соотношениям

$$F_{\alpha\beta} = F_{\alpha^*\beta^*} = 0,\ F_{\alpha\beta^*} = ig_{\alpha\beta^*},\ F_{\alpha^*\beta} = -ig_{\alpha^*\beta}.$$

Автор приходит к следующим заключениям:

1. Равенство нулю ковариантного дифференциала δF формы F не влечет за собой равенство нулю внешнего дифференциала dF этой формы. Однако равенство $dF = 0$ (келерово многообразие) влечет за собой обращение в нуль δF. Метрика называется δF-метрикой, если $\delta F = 0$.

2. Если заданная метрика является δF-метрикой, то аналитические комплексные координаты изотермичны, так как в этом случае лапласиан $\Delta(z^\alpha) = 0$. Справедливо и обратное утверждение.

3. Если аналитические комплексные координаты изотермичны, то компоненты тензора Риччи сводятся к:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,g^{\gamma\sigma^*}g^{\delta\rho^*}(dF)_{\alpha\delta\sigma^*}(dF)_{\beta\gamma\rho^*},$$

$$R_{\alpha\beta^*} = -\frac{1}{4}\,g^{\gamma\sigma^*}g^{\delta\rho^*}\left[(dF)_{\alpha\delta\sigma^*}(dF)_{\beta^*\rho^*\gamma} + (dF)_{\alpha\gamma\rho^*}(dF)_{\beta^*\rho^*\delta} + (dF)_{\gamma\delta\beta^*}(dF)_{\rho^*\sigma^*\alpha}\right] - g^{\gamma\sigma^*}\left[\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta^*}}{\partial z^\gamma \partial z^{\sigma^*}} - g^{\delta\rho^*}\frac{\partial g_{\alpha\rho^*}}{\partial z^\gamma}\frac{\partial g_{\beta^*\delta}}{\partial z^{\sigma^*}}\right],$$

а для случая келеровой метрики

$$R_{\alpha\beta} = 0,\ R_{\alpha\beta^*} = -\frac{\partial^2 \log G}{\partial z^\alpha \partial z^{\beta^*}},\ \text{где } G = \det \mid g_{\alpha\beta^*} \mid.$$

Н. М. Остиану

3960. **Конформно-келеровы многообразия. Уэстлейк** (Conformally Kähler manifolds. Westlake W. J.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, 50, part 1, 16—19 (англ.)

В первой части статьи изучается конформное преобразование метрики эрмитова пространства H_n, рассматриваемого в малом. Эрмитовым пространством H_n называется n-мерное комплексное пространство с метрикой, определяемой невырождающимся эрмитовым тензором $g_{\alpha\bar{\beta}}$, компоненты которого являются полуаналитическими функциями. В H_n определяется линейная связность с помощью объекта связности $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = g^{\bar{\omega}\gamma}\partial_\alpha g_{\beta\bar{\omega}}$ (Схоутен и Стройк, Введение в новые методы диффе-

ренциальной геометрии II, М., Изд-во иностр. лит-ры, 1948). Эрмитово пространство называется келеровым пространством, если тензор кручения связности $S^{\gamma}_{\alpha k} = \Gamma^{\gamma}_{[\alpha\beta]}$ равен нулю. Конформным преобразованием метрики в H_n называется переход к новой метрике, определяемой эрмитовым тензором $g^{i}_{\alpha\bar{\beta}} = \sigma g_{\alpha\bar{\beta}}$, где σ — скалярная функция точки, которая, очевидно, должна быть полуаналитической и принимающей только действительные значения. Эрмитово пространство H_n называется конформно-келеровым, если с помощью конформного преобразования метрики его можно превратить в келерово пространство. Основным результатом первой части статьи является доказательство того, что эрмитово пространство H_n при $n > 2$ будет конформно-келеровым тогда и только тогда, когда равен нулю тензор

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta} = S^{\gamma}_{\alpha\beta} + \frac{2}{n+1}\,\delta^{\gamma}_{[\alpha}S_{\beta]}, \text{ где } S_{\beta} = S^{\omega}_{\beta\omega}.$$

Если $n = 2$, то этот тензор всегда равен нулю и необходимым и достаточным условием того, что H_2 будет конформно-келеровым, является равенство нулю тензоров $\partial_{[\beta}S_{\alpha]}$, $\partial_{[\bar{\beta}}S_{\alpha]}$. Во второй части статьи автор переходит к рассмотрению эрмитовых пространств в целом и доказывает, что если эрмитово пространство односвязно или, в более общем случае, если его фундаментальная группа состоит только из элементов конечного порядка, то предыдущая локальная теорема переносится в геометрию в целом. В. В. Вагнер

3961. Простые дифференциалы второго рода на многообразиях Ходжа. Розенлихт (Simple differentials of second kind on Hodge manifolds. Rosenlicht Maxwell), Amer. J. Math., 1953, **75**, № 3, 621—626 (англ.)

Линейная мероморфная дифференциальная форма ω на комплексном аналитическом многообразии называется простым дифференциалом второго рода, если для всякой точки существует такая окрестность и в ней такая мероморфная функция f, что $\omega = df$ (в данной окрестности). Если ω — дифференциал мероморфной функции, заданной на всем многообразии, то она есть точный дифференциал.

Пусть Ω_2 — векторное пространство всех простых дифференциалов второго рода над полем комплексных чисел, а Ω_e — пространство точных дифференциалов. Легко доказывается, что $\dim \Omega_2 / \Omega_e \leqslant B_1$, где B_1 — первое число Бетти многообразия. Для келеровых многообразий частного вида (так называемых многообразий Ходжа) в этой формуле имеет место равенство. В частности, это оказывается верным для всевозможных несингулярных алгебраических многообразий.

А. М. Васильев

3962. О неголономной общей метрической геометрии. Рунд (Über nicht-holonome allgemeine metrische Geometrie. Rund Hanno), Math. Nachr., 1954, **11**, № 1—2, 61—80 (нем.)

В n-мерном финслеровом пространстве F_n задается выпуклая (konvex) и положительно однородная первого порядка относительно аргументов направления x'^i функция $F(x^i, x'^i)$, определяющая метрику пространства, и совокупность m ($m < n$) также положительно однородных первого порядка относительно x'^i функций $G_\mu(x^i, x'^i)$ ($\mu = 1, \ldots, m$), назначение которых — поставить задачу Лагранжа для

$$G_{(\mu)}(x^i, x'^i) = 0. \qquad (1)$$

При этом геодезическими линиями пространства F_n называются линии C, дающие экстремум интегралу $S(P, R) = {}^{(C)}\int_P^R F(x^i, x'^i)\,dt$ (P, R — две какие-либо то ки пространства) независимо от условий (1); экстр мальными кривыми — линии, дающие решения зада Лагранжа; автопараллельные кривые при перенесени определяемом равенствами (1), называются траекториям Последние можно определить как кривые из F_n, пр надлежащие к неголономному многообразию (1), ес их главные нормали перпендикулярны к $(n-m)$-ме ному многообразию, касательному к (1).

Выводятся дифференциальные уравнения траектор и вводится «неголономный параметр перенесения Q для направления x'^i, удовлетворяющего условиям (а с его помощью — понятие ковариантной «δ-произво ной» векторного поля X^i: $\delta X^i / \delta s = dX^i / ds + Q^i_{hk}(x, x')\,X^h x'^k$. Обращение в нуль δ-производно вдоль некоторой кривой определяет δ-параллельн перенесение; при условии $\delta x'^i / \delta s = 0$ траектории я ляются δ-автопараллельными кривыми.

Затем находятся дифференциальные уравнения экстр мальных кривых. Эти кривые в том и только том сл чае являются траекториями, если система уравнений является слабо голономной по отношению к полю касательных векторов, т. е. векторное поле $X^i(x$ удовлетворяет (1) и, кроме того, уравнен $A_{(\mu)\,i}\,(x\,,\ X^k(x^h))\,dx^i = 0$, где $A_{(\mu)i} = \partial G_{(\mu)} / \partial x$ определяют интегрируемое многообразие в F_n. Искл чение этой теоремы составляет тот случай, когда ура нения (1) линейны относительно x'^i. В этом случае со падение экстремальных кривых с траекториями влеч за собой полную интегрируемость уравнений (1), наоборот.

Далее вводятся два «неопределенных» тензора кр визны пространства F_n в точке x^h для поля направл ний x'^i. Они неопределенны потому, что зависят производных $\partial x'^l / \partial x^k$. Один из этих тензоров строит обычным путем ($K^i_{.hkj}$), тогда как другой ($H^i_{.hkj}$) — аналогии с ним, путем замены обыкновенного парам ра перенесения параметром неголономным.

Этот тензор используется при определении уравнен отклонения (Abweichung) двух бесконечно близк траекторий, аналогичного геодезическому отклонен двух бесконечно близких геодезических в F_n.

Развитая в настоящей работе теория неголономно общего метрического пространства, по мнению авто может быть применена к пространству Кавагу (Kawaguchi A., Rend. Circolo mat. Palermo, 1932, 245—276).

Автор отмечает сходство своих исследований с следованиями Синга (Synge J. L., Proc. London ma Soc., 1926, 25, 247—264) по неголономной геометр риманова пространства. В отличие от Синга, автор значительно избегает вариационных принципов.

Следует отметить игнорирование работ советск геометров и, в частности, работ В. В. Вагнера неголономным многообразиям финслерова простр ства.

Библиография, 12 названий. Н. И. Кован

3963. О псевдогармонических тензорных полях. Сугури (On pseudo harmonic tensor fields. Sugu Tsuneo), Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Univ., 19 **A7**, № 2, 61-68 (англ.)

Рассматривается компактное дифференцируемое м гообразие S^n с аффинной связностью E^h_{ij}, обладающ кручением ($E^h_{ij} \neq E^h_{ji}$).

Вводится дважды непрерывно дифференцируемый, определенно положительный симметрический ковариантный тензор $g_{ij}(x)$, с которым сопоставляется символ Кристоффеля $\left\{ {h \atop ij} \right\}$. Ковариантное дифференцирование относительно E^h_{ij} и $\left\{ {h \atop ij} \right\}$ обозначается соответственно чертой или запятой. Предполагается, что $g_{ij|k} = 0$.

С каждым тензорным полем $\xi_{i_1 \ldots i_p}$ можно сопоставить скаляр $\varphi = g^{i_1 j_1} \ldots g^{i_p j_p} \xi_{i_1 \ldots i_p} \xi_{j_1 \ldots j_p}$, и если поле $\xi_{i_1 \ldots i_p}$ дважды непрерывно дифференцируемо, то можно определить лапласиан от φ и псевдолапласиан $\Delta\varphi = g^{ij}\varphi_{,i,j}$ и $\bar{\Delta}\varphi = g^{ij}\varphi_{|i|j}$.

Поле $\xi_{i_1 \ldots i_p}(x)$ называется ограниченным (псевдоограниченным), если $\Delta\varphi(P_0) < 0$, $(\bar{\Delta}\varphi(P_0) < 0)$ в некоторой точке P_0 в S^n, или $\varphi(P) = \text{const}$ в S^n.

По определению, дважды непрерывно дифференцируемое поле кососимметрического тензора $\xi_{i_1 \ldots i_p}(x)$ называется псевдогармоническим, если выполняются условия

$$(\widetilde{D}\xi)_{i_1 \ldots i_p i p+1} \equiv \sum_{r=1}^{p+1} (-1)^{r-1} \xi_{i_1 \ldots i_r \ldots i_{p+1} | i_r} = 0,$$

$$(\widetilde{D}^*\xi)_{i_1 \ldots i_{p-1}} \equiv g^{ik} \xi_{i_1 \ldots i_{p-1} i|k} = 0.$$

Рассматривая групповое пространство неабелевой полупростой компактной группы и обозначая структурные константы через $C^\alpha_{\beta\gamma}$, можно определить симметрический положительно определенный тензор $g_{\alpha\beta} = C^\gamma_{\alpha\delta} C^\delta_{\gamma\beta}$ и два объекта связности $E^h_{ij} = A^h_i \partial_j A^\alpha_i$, $\overline{E}^h_{ij} = \overline{A}^h_\alpha \partial_j \overline{A}^\alpha_i$, $E^h_{ij} \neq E^h_{ji}$, которые будут связаны между собой: $\overline{E}^h_{ij} = E^h_{ji}$. Следовательно, существуют два тензора кручения Ω^h_{ij} и $\overline{\Omega}^h_{ij}$ (Эйзенхарт, Непрерывные группы преобразований, М., 1947, гл. V). Пользуясь этими тензорами, автор доказывает основной результат работы: Если групповое пространство неабелевой полупростой группы компактно и для любого ненулевого векторного поля $X_i(x)$ всегда удовлетворяется одно из условий

$$(a)\ \Omega^{ij}_k X_j\ {}_i X^k \geqslant 0, \quad (b)\ \overline{\Omega}^{ij}_k X_{j\|i} X^k \geqslant 0,$$

то любое псевдогармоническое тензорное поле $\xi_{i_1 \ldots i_p}(x)$ в пространстве есть псевдоограниченное тензорное поле первого и второго рода (соответственно тому будет или иметь место (a) или (b)). Следовательно, если обозначить через $B_p\ (1 \leqslant p \leqslant n-1)$ максимальное число гомологически независимых псевдогармонических тензорных полей порядка p, то $B_p \leqslant \binom{n}{p}$.

Этот результат уточняет исследования Бохнера по тому вопросу, не учитывающие кручения S^n. Одновременно и независимо от автора тот же результат получен в совместной работе Бохнера и Яно (Bochner S., Yano K., Ann. Math., 1952, 56, 504—519). А. З. Петров

3964. Распространение микроволн между двумя проводящими параллельными поверхностями двоякой кривизны. Кунц (Propagation of microwaves between a parallel pair of doubly curved conducting surfaces. Kunz K. S.), J. Appl. Phys., 1954, 25, № 5, 642—653 (англ.)

Конструирование быстро сканирующей радарной антенны, основанное на применении поверхностных волноводов, приводится к математической задаче отыскания поверхности Σ, удовлетворяющей условиям: 1) Σ содержит круг C; 2) Σ содержит отрезок прямой l; 3) все геодезические линии, соединяющие фиксированную точку круга C с точками отрезка l, встречают отрезок l под постоянным углом; 4) все геодезические линии, нормальные к кругу C, проходят через фиксированную точку отезка l.

Частные приближенные решения этой задачи находятся путем построения поверхностей, оптически эквивалентных так называемой линзе Люнеберга (Rinehart R. F., J. Appl. Phys., 1948, 19, 860—862).

Вопрос об оптической эквивалентности двух поверхностей (волновод) с помощью обобщенного принципа Ферма для поверхностей вращения сводится к задаче об эквивалентности двух дифференциальных форм двух переменных, которую в случае, когда одна из поверхностей плоская с переменным показателем преломления, а другая — поверхность двойной кривизны с постоянным показателем преломления, автор сводит, используя теорию инвариантов дифференциальных форм, к решению нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка (требуется найти какие-нибудь частные решения, никаких предельных или начальных условий не ставится). П. П. Касьянков

3965. О четырех дополнительных условиях в теории тяготения Эйнштейна. Де-Донде (Sur les quatre liaisons introduites dans la gravifique Einsteinienne. De Donder Th.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1953, 39, № 12, 1024—1026 (франц.)

В 1921 г. автор ввел в пространстве Римана специальную систему координат, которая сейчас называется гармонической. В такой системе координат

$$\partial \sqrt{-g} g^{ik} / \partial x^k = 0. \qquad (1)$$

Вводя обозначения $g^{-ik} = \sqrt{-g} g^{ik}$, $g^{-ik}_l = \partial g^{-ik} / \partial x^l$, можно представить тензор R_{ik} как лагранжеву производную от лагранжиана $L = \sqrt{-g} g^{ik} (\Gamma^n_{im} \Gamma^m_{kn} - \Gamma^n_{ik} \Gamma^m_{nm})$:

$$R_{ik} = \frac{\delta L}{\delta g^{-ik}} = \frac{\partial L}{\partial g^{-ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial L}{\partial g^{-ik}_l} \right). \qquad (2)$$

Если принять во внимание условия гармоничности (1), то уравнения поля в пустоте в гармонической системе координат должны быть записаны в форме:

$$\frac{\delta}{\delta g^{-ik}} \left\{ L + \lambda_i \frac{\partial g^{-ik}}{\partial x^k} \right\} = 0, \qquad (3)$$

где λ_i — множитель Лагранжа. После вычисления уравнения поля принимают вид:

$$R_{ik} - \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{ik} \right) \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial x^k} + \frac{\partial \lambda_k}{\partial x^i} \right) = 0 \qquad (4)$$

(по i и k суммирование не производится). Принимая во внимание, что ковариантные производные тензора $R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R$ тождественно исчезают, автор получает четыре дифференциальных тождества, которым должны удовлетворять множители Лагранжа λ_i. Ю. Р.

3966. Замечания к основам теории относительности. Александров А. Д., Овчинникова В. В., Вестн. Ленингр. ун-та, 1953, № 11, 95—110.

Доказывается, что для общего преобразования Лоренца, а вместе с ним для всей релятивистской кинематики (лоренцова сокращения, закона сложения скоростей и т. п.) достаточно закона постоянства скорости света и евклидовости пространства без привлечения принципа относительности и каких бы то ни было дополнительных соображений.

По определению, общее преобразование Лорентца записывается следующим образом:

$$r' = \lambda\left[r + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right)\frac{(rV)\,V}{v^2} - \frac{Vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + a\right],$$

$$t' = \lambda\left[\frac{t - (rV)/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + b\right].$$

Это определение отличается от обычного включением в группу Лорентца пропорционального изменения координат пространства — времени и переноса начала отсчета времени.

Закон распространения света в четырехмерном пространстве с координатами x, y, z, t выражается формулой $r = c(t - t_0)$, причем в евклидовом пространстве существуют системы, в которых

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Авторы называют «лоренцовой» систему координат, в которой закон распространения света выражается последними двумя формулами вместе.

Формально содержание работы сводится к доказательству следующей математической теоремы: Преобразование от одной лоренцовой системы к другой при условии неизменности скорости света есть общее преобразование Лоренца.

Основы теории относительности формулируются тремя положениями: (A) существуют лоренцовы системы координат; (B) всякое общее преобразование Лоренца возможно; (C) все лоренцовы системы равноправны (т. е. выражения физических законов инвариантны относительно общих преобразований Лоренца). Вместо закона постоянства скорости света можно принять закон ограниченности скоростей: всякое воздействие распространяется не быстрее скорости c: $r \leqslant c(t - t_0)$

В. А. Г.

3967 К. Тензорный анализ. Синг, Шилд (Tensor calculus. Synge John Lighton, Schild Alfred. 2-d ed., 324 p., Univ. of Toronto Press., 1953, 6.50 doll.), Cumul. Book Index, 1954, **57**, № 3, 93 (библ.)

3968 Д. О некоторых n—2 проективных пространствах. Веденяпин Д. В., Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1954

3969 Д. К дифференциальной геометрии линейчатых гиперповерхностей четырехмерного евклидова пространства. Лаката (Ein Beitrag zur Differentialgeometrie der Regelhyperflächen im vierdimensionalen euklidischen Raum. Lakatha Heinrich. Diss., phil. III + 42 Bl., Wien, 1953), Oesterr. Bibliogr., 1954, № 8, 12 (библ.)

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

3970. О линеаризации гладких конформных отображений. Мюрберг (Über die Linearisierung der schlichten konformen Abbildungen. Myrberg P. J.), Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A. I. Math.-Phys., 1953, № 145, 8 (нем.)

Пусть D — плоская область и $z' = T(z)$ — взаимно однозначное отображение D в себя. Автор доказывает, что если имеются две граничные точки области D, которые остаются фиксированными в отображении T, то существует конформное отображение $w = \varphi(z)$ области D в область D' такое, что в D' преобразование $\varphi T \varphi^{-1}$ является линейным. На примере показывается, что отображение φ не обязано быть единственным.

H. L. Royden

Перевод из Math. Revs, 1953, 14, № 9, 861.

3971. Пути на минимальных плоскостях. Лауффер (Wege in Minimalebenen. Lauffer Rudolf), Math. Nachr., 1953, **9**, № 4, 241—242 (нем.)

Рассматривается путь $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, лежащий на минимальной плоскости $\mu \equiv \mathbf{m}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$, $\mathbf{m}^2 = 0$. Если $\mathbf{a}$ — произвольный единичный вектор, параллельный плоскости μ ($\mathbf{a}^2 = 1$, $\mathbf{am} = 0$), то дифференциал дуги оказывается равным $s = (\mathbf{ar})$ или $-(\mathbf{ar})$. Так как для замкнутого пути $\oint \mathbf{r}\, dt = 0$, то длина такого пути на минимальной плоскости равна нулю.

Если даны две минимальные плоскости μ_1 и μ_2, то в качестве вектора $\mathbf{a}$ берется единичный вектор $\mathbf{g}_{12}$, параллельный прямой g_{12} пересечения этих плоскостей, и при его помощи определяется дифференциал дуги на обеих плоскостях так, что он на прямой g_{12} не зависит от того, к какой из плоскостей относится эта прямая. Длина любого замкнутого пути, лежащего на этих плоскостях, равна нулю.

На системе $2n$ ($n \geqslant 2$) циклически упорядоченных минимальных плоскостей μ_k дифференциал дуги вводится так, что на каждой из $2n$ прямых $g_{k,k+1} = \mu_k \times \mu_{k+1}$ он определяется однозначно. Пусть далее $P_k = \mu_{k-1} \times \mu_k \times \mu_{k+1}$ и $K = P_1P_2 + P_2P_3 + \cdots + P_{2n}P_1$ — периметр замкнутого многоугольника $P_1P_2 \cdots P_{2n}P_1$. Тогда длина любого замкнутого пути, принадлежащего рассматриваемой системе плоскостей, равна либо целому кратному K, либо нулю.

Этот результат обобщает и придает более симметричный вид аналогичному результату для минимального четырехгранника, полученному В. Бляшке (Blaschke W., Arch. Math., 1949, **1**, № 3, 182—189). М. А. Акивис

3972. О точечных преобразованиях, огибающих семейство гомографических преобразований. Мураккини (Sulle trasformazioni puntuali inviluppi di omografie. Muracchini Luigi), Boll. Unione mat. ital., 1953, **8**, ser. 3, № 4, 390-398 (итал.)

Вводится понятие огибающей семейства гомографических преобразований двух проективных пространств S_n и $\overline{S}_n$ и указывается способ ее построения. Рассматривается семейство $K = K(u_1, \ldots, u_s)$ гомографических преобразований двух проективных пространств S_n и $\overline{S}_n$ и предполагается, что точка $P(u_1, \ldots, u_s)$, принадлежащая некоторому многообразию V_s из S_n, переходит в одну и ту же точку $\overline{P}(u_1, \ldots, u_s)$, принадлежащую многообразию $\overline{V}_s$ из $\overline{S}_n$, при всех гомографических преобразованиях K, $\frac{\partial K}{\partial u_i}$ $(i = 1, \ldots, s)$. Тогда K имеет аналитическое касание первого порядка с V_s и $\overline{V}_s$ в точках P и $\overline{P}$. В частном случае, когда K зависит только от одного параметра t, многообразия V_s и $\overline{V}_s$ сводятся к двум кривым Γ и $\overline{\Gamma}$, описываемым точками P и $\overline{P}$, и автор рассматривает касание произвольного порядка r семейства $K(t)$ с кривыми Γ и $\overline{\Gamma}$. Затем соответствие между точками P и $\overline{P}$ автор заменяет соответствием k-мерных линейных пространств $S_k(u_1, \ldots, u_s)$ и $\overline{S}_k(u_1, \ldots, u_s)$, принадлежащих многообразиям V_{k+s} и $\overline{V}_{k+s}$ проективных пространств S_n и $\overline{S}_n$. Каждой точке S_k соответствует одна и та же точка $\overline{S}_k$ при всех гомографических преобразованиях K, $\frac{\partial K}{\partial u_i}$ $(i = 1, \ldots, s)$. Между многообразиями V_{k+s} и $\overline{V}_{k+s}$ устанавливается соответствие Σ

такое, что K имеет аналитическое касание первого порядка с V_{k+s} и $\overline{V}_{k+s}$ во всех парах точек, соответствующих друг другу по Σ и принадлежащих S_k и $\overline{S}_k$; тогда говорят, что K касается соответствия Σ между V_{k+s} и $\overline{V}_{k+s}$ вдоль S_k и $\overline{S}_k$. При $k = n - s$ подпространства S_k и $\overline{S}_k$ заполняют пространства S_n и $\overline{S}_n$, а многообразия V_{k+s} и $\overline{V}_{k+s}$ совпадают с S_n и $\overline{S}_n$ соответственно. Семейства гомографических преобразований $K(u_1, \ldots, u_s)$, $\frac{\partial K}{\partial u_i}$ $(i = 1, \ldots, s)$ переводят все точки $P(u_1, \ldots, u_s)$ каждого из S_{n-s} в одну и ту же точку $P(u_1, \ldots, u_s)$ соответственного $\overline{S}_{n-s}$. Аналогично предыдущему устанавливается точечное соответствие T между пространствами S_n и $\overline{S}_n$, играющее по отношению к ним ту же роль, что преобразование Σ по отношению к V_{k+s} и $\overline{V}_{k+s}$ в предыдущем случае. Точечное преобразование T называется огибающим семейство гомографических преобразований.

В заключение автор останавливается на отдельных свойствах огибающей T, на основании которых и выводит способ ее построения. Особое внимание он уделяет случаю $s = 2$, $n = 3$, рассмотренному ранее Чехом (Čech, J. Tchèque de Math., 1952, 2, 167—189) и устанавливающему непосредственную связь понятия огибающей семейства гомографических преобразований с теорией конгруэнций прямых в трехмерном пространстве.

В. П. Белоусова

3973. О покрытии плоскости многоугольниками. Микусинский (Sur le parquetage du plan par des polygones. G-Mikusiński J.), Colloq. math., 1954, **3**, № 1, 14—18 (франц.)

Исследуется покрытие плоскости произвольными (неналегающими) треугольниками при условии, что: 1) вершины треугольников совпадают (т. е. вершины одного треугольника, касающиеся другого треугольника, являются вместе с тем вершинами последнего); 2) в каждом узле встречаются не более 6 треугольников. Узел, в котором встречаются $(6-d)$ треугольников, имеет дефект, равный d. Доказывается, что сумма дефектов во всех узлах не может быть более 6. По ходу доказательства для любого многоугольника, разделенного на треугольники, устанавливается соотношение

$$2S + D = E + 6,$$

где S — число вершин многоугольника, D — сумма дефектов во внутренних узлах, E — число лежащих на границе концов всех отрезков, расположенных внутри многоугольника.

Далее рассматривается покрытие плоскости многоугольниками (и криволинейными) в предположении, что: 1) в каждом узле встречаются 3 многоугольника, 2) многоугольники имеют не более 6 сторон. Многоугольник с $(6-d)$ сторонами имеет дефект, равный d. Сумма дефектов в указанном покрытии не может быть более 6. Отсюда следует, что такое покрытие не может быть осуществлено одними только пятиугольниками. Однако покрытие семиугольниками, и даже только выпуклыми, оказывается возможным. А. Г. Школьник

3974. Обоснование гиперболической геометрии. Клингенберг (Eine Begründung der hyperbolischen Geometrie. Klingenberg Wilhelm), Math. Ann., 1954, **127**, № 4, 340—356 (нем.)

Рассматривается группа $\mathfrak{G}$ с единицей e и инволюторными, т. е. имеющими порядок 2, образующими (назовем их прямыми) $g, h, j, \ldots$

Определения: $g \perp h$, если $gh = hg$ и $gh \neq e$; произведение $P = gh$ двух взаимно перпендикулярных прямых g и h называется точкой; точка P и прямая g инцидентны, если $Pg = gP$ и $Pg \neq e$; прямые g, h, j лежат в пучке, если произведение ghj инволюторно; прямые g и h гранично параллельны (общая точка абсолютна), $g \top h$, если g и h не имеют ни общего перпендикуляра, ни общей точки.

Группу $\mathfrak{G}$ автор называет гиперболической геометрией, если выполняются аксиомы: 1. Для двух различных точек P и Q существует прямая, инцидентная P и Q. 2. Эта прямая определяется однозначно. 3. Для точки P и прямой g существует инцидентная P прямая l, перпендикулярная к g. 4. Произведение ghj прямых g, h, j, инцидентных P (5. перпендикулярных к l), есть прямая. 6. Существуют такие три прямые g, h, j, что $g \perp h$ и $h \top j$. 7. Если $g \top h$ и $g' \top h'$, то существует прямая j, лежащая и в пучке с g, h и в пучке с g', h'. 8. Если прямая g гранично параллельна каждой из прямых h, h', h'', то g лежит в пучке либо с h, h', либо с h', h'', либо с h'', h. («Прямая g содержит не более двух граничных точек».)

Аналогичные интерпретации абсолютной, евклидовой и эллиптической геометрий были предложены Шмидтом и Бахманом (Schmidt A., Math. Ann., 1943, **118**, 609—625; Bachmann F., Math. Ann., 1951, **123**, 341—344).

Автор показывает, что группа $\mathfrak{G}$, удовлетворяющая аксиомам 1—8, изоморфна группе коллинеаций проективной плоскости над расположенным полем $\mathbf{K}$ с отличной от 2 характеристикой, оставляющих инвариантным некоторое невырождающееся коническое сечение, и группе проективных отображений на себя проективной прямой над $\mathbf{K}$.

Автор вводит понятие гиперболической подгеометрии (hyperbolische Teilgeometrie) как подгруппы $\mathfrak{A}$ группы $\mathfrak{G}$, если принадлежащие $\mathfrak{A}$ прямые составляют систему ее образующих, и для $\mathfrak{A}$ с этими образующими выполняются аксиомы 1—6. А. С. Смогоржевский

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

3975. Некоторые минимальные задачи относительно овала. Кубота, Хемми (Some problems of minima concerning the oval. Kubota Tadahiko, Hemmi Denzaburo), J. Math. Soc. Japan, 1953, **5**, № 3—4, 372—389 (англ.)

Пусть F, L, D, Δ — соответственно площадь, периметр, диаметр и наименьшая ширина плоской выпуклой фигуры (овала) Φ. Как известно, переход к центрально-симметричному овалу с той же шириной (т. е. расстоянием между параллельными опорными прямыми) сохраняет L, D, Δ и лишь увеличивает F; это облегчает получение оценок F сверху через величины L, D, Δ. Чтобы указать путь к нижним оценкам F, авторы строят следующий противоположный процесс асимметризации. От Φ переходим к центрально-симметричному овалу B с вдвое большими ширинами. Пусть $A_1 \ldots A_6$ — вписанный в B аффинно-правильный шестиугольник (т. е. шестиугольник, у которого противоположные стороны равны и параллельны). Перенося центр овала B в соседние вершины A_1 и A_2, получаем овалы B' и B''. Общая часть B, B', B'' представляет собой выпуклую фигуру, которую авторы называют асимметричным овалом, получаемым из B относительно основного шестиугольника $A_1 \ldots A_6$. Устанавливается, что если $A_1 \ldots A_6$ — максимальный по площади из основных шестиугольников, вписанных в B, то полученный асимметричный овал имеет площадь, не большую, чем площадь овала Φ при тех же ширинах во всех направлениях.

Предварительно перечислив известные оценки F снизу через одну или две из величин L, D, Δ, авторы иссле-

дуют случаи, оставшиеся неизученными. В частности, доказывается, что при $\sqrt{3}D/2 \leqslant \Delta \leqslant D$

$$F \geqslant 3\Delta\{\sqrt{D^2-\Delta^2}+\Delta(\sin^{-1}\Delta/D-\pi/3)\}-\sqrt{3}D^2/2,$$

а при $\pi\Delta \leqslant L \leqslant 2\sqrt{3}\Delta$

$$2F \geqslant \Delta L - \sqrt{3}\Delta^2\sec^2\theta,$$

где $\operatorname{tg}\theta-\theta=(L-\pi\Delta)/(6\Delta)$; $0\leqslant\theta\leqslant\pi/6$. Приводятся те единственные фигуры, для которых при данных D, Δ (или L, Δ) в этих оценках имеют место случаи равенства.

В. А. Залгаллер

3976. **Две минимальные задачи для выпуклых тел вращения. Бири** (Zwei Minimumprobleme über konvexe Rotationskörper. Bieri H.), Elem. Math., 1954, 9, № 3, 63—67 (нем.)

Среди выпуклых тел вращения с данными длиной оси l и длиной дуги меридиана L наименьшую площадь поверхности F имеют конус и все усеченные конусы с теми же l и L; для остальных тел F строго больше. В тех же условиях наименьший объем V достигается только для следующих тел: при $L \leqslant 4l/3$ — для цилиндра; при $4l/3 \leqslant L \leqslant \sqrt{2}l$ — для одного из усеченных конусов; при $L \geqslant \sqrt{2}l$ — для конуса.

Нижнюю границу F и V достаточно искать для тел вращения с меридианом в виде ломаной. Ломаные с числом звеньев больше трех автору удается исключить, сравнивая характер зависимостей $F(L)$ и $V(L)$ для ломаных с разным числом звеньев при варьировании положения одной из вершин. После этого среди оставшихся простейших тел легко отыскиваются экстремальные.

В. А. Залгаллер

3977. **Изотермические координаты в многообразиях ограниченной кривизны. Решетняк Ю. Г.**, Докл. АН СССР, 1954, 94, № 4, 631—633

Доказывается, что любое двумерное многообразие ограниченной кривизны в смысле А. Д. Александрова (Александров А. Д., Докл. АН СССР, 1948, 63, № 4, 349—352) допускает введение достаточно регулярных изотермических координат. Точнее, пусть R — многообразие ограниченной кривизны, M — гомеоморфная замкнутому кругу область в R, граница которой имеет поворот ограниченной вариации. Тогда в области M можно ввести координаты x, y так, что для любых точек A, $B \in M$ расстояние $\rho(A,B)=\inf s_\lambda(L)$, где точная нижняя грань берется для всех кусочно-линейных (относительно координат x, y) кривых L, соединяющих точки A, B и

$$s_\lambda(L)=\int_L \sqrt{\lambda(z)}\,|dz|.$$

При этом

$$\lambda(z)=\exp\left\{\frac{1}{\pi}\iint_D \ln\frac{1}{|z-\zeta|}\,\omega(dE_\zeta)+h(z)\right\};$$

здесь D — (ограниченная) область изменения координат x, y в плоскости $z=x+iy$, $\omega(E)$ — кривизна множества $E\subset M$, dE_ζ — элемент плоскости, $h(z)$ — вещественная гармоническая функция в области D; интегрирование производится по ζ, интеграл понимается в смысле Лебега — Стилтьеса.

Н. В. Ефимов

3978. **Об однозначной определенности выпуклых поверхностей с краем. Гойе** (Sur la rigidité des calottes convexes à bord. Gohier Simone), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 19, 1859—1861 (франц.)

С помощью интегральной формулы Герглотца (Herglotz, Abhandl. Math. Seminar Hansischen, 1943, 15, 127) для изометричных поверхностей устанавливается однозначная определенность выпуклых регулярных поверхностей с краем при условии, что поверхности касается вдоль края некоторой сферы или кругового цилиндра.

А. В. Погорелов

3979. **Изгибания скольжения и однозначная определенность изометричных шапок с плоской границей. Гротемейер** (Gleitverbiegungen und eindeutige Bestimmtheit isometrischer, ebenrandiger Mützen. Grotemeyer K. P.), Math. Z., 1953, 59, № 3, 278—289 (нем.)

Автор доказывает известные теоремы о трижды непрерывно дифференцируемых шапках (выпуклые поверхности с плоским краем, однозначно проектирующиеся на плоскость края): 1) шапки не допускают бесконечно малых изгибаний скольжения (бесконечно малые изгибания, поле скоростей которых вдоль края располагается в плоскости края), 2) теорема Погорелова (однозначная определенность шапок в классе шапок). Теоремы доказываются при помощи интегральных формул, аналогичных формуле Герглотца.

Библиография, 12 названий.

Э. Г. Позняк

3980. **Об изгибании выпуклых колпаков. Рембс** (Zur Verbiegbarkeit konvexer Kalotten. Rembs Eduard), Arch. Math., 1953, 4, № 5/6, 366—368 (нем.)

Доказывается, что при любом нетривиальном бесконечно малом изгибании выпуклого колпака (одна из двух частей овальной поверхности, разделенной линией тени при центральном освещении) граница колпака перестает быть линией тени. Доказательство основано на интегральной формуле, аналогичной интегральной формуле, применяемой Гротемейером (Grotemeyer K.-P., Arch. Math., 1953, 4, № 1, 52—60).

Приводится дифференциальное уравнение для функции $\varphi=(\mathbf{sx})$, где $\mathbf{s}$ — поле перемещений бесконечно малого изгибания, а $\mathbf{x}$ — радиус-вектор поверхности.

Э. Г. Позняк

3981. **Замечание об изгибании выпуклых поверхностей. Гротемейер** (Bemerkung zur Verbiegung konvexer Flächen. Grotemeyer K. P.), Math. Z., 1953, 59, № 3, 258 (нем.)

Указывается, что в множестве $\{F^*\}$ поверхностей, изометричных поверхности F, граница которой — собственная линия тени (РЖМат, 1954, 2338), поверхность F характеризуется тем, что сферическое отображение границы имеет минимальную длину (2π).

Э. Г. Позняк

См. также: 3548 К, 3554, 3555, 3648, 3683, 3736, 3773 К, 3809

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

3982. **Заметка о численном интегрировании дифференциальных уравнений четвертого порядка. Вудс** (A note on the numerical solution of fourth order differential equations. Woods L. C.), Aeronaut. Quart., 1954, 5, № 3, 176—184 (англ.)

Рассматривается решение уравнения

$$\nabla^4 w = k(x,y) \qquad (1)$$

методом сеток. С помощью введения вспомогательной функции $v=h^2\nabla^2 w$, где h — шаг квадратной сетки, уравнение (1) сводится к системе

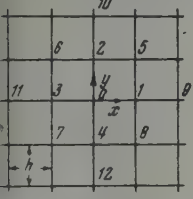
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{v}{h^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=h^2 k.$$

Последняя приближенно заменяется системой линейных алгебраических уравнений вида

$$4\Delta w_0 + \Delta' w_0 - 6v_0 - 0{,}5h^4 k_0 = 0$$
$$4\Delta v_0 + \Delta' v_0 - 6h^4 k_0 - 0{,}5h^6 \nabla^2 k_0 = 0, \quad (2)$$

где (см. фиг.) $\Delta w_0 = \sum_{i=1}^{4} w_i - 4w_0$ и $\Delta' w_0 = \sum_{i=5}^{8} w_i - 4w_0$. Аналогичные значения имеют Δv_0 и $\Delta' v_0$. Приводится описание порядка вычислений при решении уравнений (2) по релаксационному способу.



К реф. 3982

Для более точного соблюдения граничных условий рекомендуется рассматриваемую в задаче область конформно отобразить так, чтобы граница стала прямолинейной, и приводятся необходимые вспомогательные формулы, предполагающие, что отображающая функция уже известна. Делаются некоторые замечания об уравнении движения вязкой жидкости. Приведены результаты решения задачи о прогибе зажатой по краям равномерно нагруженной квадратной пластинки.

С. Г. Кислицын

3983. **Анализ решения с помощью моделирования задачи о распространении тепла в патроне плавкого предохранителя. Гайл, Карн** (An analysis of an analogue solution applied to the heat conduction problem in a cartridge fuse. Guile A. E., Carne E. B.), Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs, 1953, 72, part 1, 861—868 (англ.)

Рассматривается задача теплопроводности для цилиндра, заполненного песком, внутри которого находится провод, нагреваемый электрическим током. Для решения поставленной задачи дифференциальное уравнение заменяется разностным, которое моделируется сеткой из сопротивлений и емкостей. Все параметры задачи считаются постоянными. Приведена схема и краткое описание модели с шестью точками по длине полуцилиндра и двенадцатью точками по радиусу. Для оценки точности модели на ней решалась одномерная задача (при отсутствии радиального потока тепла), для которой с помощью преобразования Лапласа получается решение в виде ряда (сопротивление провода считается линейно зависящим от температуры). Это точное решение, а также эксперименты с моделью позволяют автору проанализировать погрешности, происходящие от различных упрощений в постановке задачи, в частности от усреднения сопротивления провода и от величины шага разностной сетки по длине.

Общие выводы: Модель дает распределение температуры с высокой степенью точности для токов, доходящих до 5-кратного минимального тока плавления. Для токов, доходящих до 1,5-кратного минимального тока плавления, можно пренебрегать радиальными потерями для получения профиля температур, однако время плавления при этом получается со значительной погрешностью, если только оно не очень мало.

К. А. Семендяев

3984. **Новый метод решения уравнения Лапласа. Рикальдони, Понс** (Un nuevo método de resolución de la ecuación de Laplace. Ricaldoni J., Ponce A.), Bol. Fac. ingr. Montevideo, 1954, 5, № 1, 3—15 (исп.)

Решение уравнения Лапласа моделируется стационарным прогибом мембраны, которая заменяется нитяной сетью. Приведены две фотографии и графики наблюденных погрешностей. В. И. Левин

3985. **Вычисление коэффициентов поглощения водяного пара при отклонениях от закона Буге. Кузнецов** Е. С., Тр. Геофиз. ин-та АН СССР, 1954, № 23, 3—25

Задача сводится к решению интегрального уравнения

$$P(w) = \frac{1}{2N} \int_{\nu_0 - N}^{\nu_0 + N} e^{-k(\nu)w} d\nu. \quad (1)$$

Здесь w — содержание водяного пара в цилиндре единичного сечения, $P(w)$ $(0 \leqslant w \leqslant \infty)$ — известная из эксперимента функция пропускания, ν — волновое число, $k(\nu)$ — искомый коэффициент поглощения, $[\nu_0 - N, \nu_0 + N]$ — исследуемый участок спектра. Отмечается, что решение уравнения (1), вообще говоря, не единственно. Автор ищет решение, являющееся убывающей функцией от $|\nu - \nu_0|$. Предлагаются (без обоснования) различные приемы приближенного решения уравнения (1). В частности, автор предлагает приближенную формулу

$$k(\nu) = k_0 \left[1 + \frac{(\nu - \nu_0)^2}{c^2}\right]^{-1}$$

и приводит способ определения параметров k_0 и c. Пользуясь этим методом, автор вычислил коэффициенты поглощения в основных полосах поглощения инфракрасного излучения Солнца земной атмосферой.

М. Ш. Бирман

3986. **Собственные колебания катушек и трансформаторов. Абетти, Магинниес** (Fundamental oscillations of coils and windings. Abetti P. A., Maginniss F. J.). Power Appar. and Systems, 1954, № 1, 1—10 (англ.)

Составляется интегральное уравнение для определения собственных частот трансформаторов и катушек и соответствующих им собственных функций, изображающих распределение напряжения. Исследование отличается от предыдущих учетом взаимной индукции, причем авторы показывают, что ее влияние невелико и расчет, произведенный для прямолинейного проводника, приближенно справедлив и для катушки. Собственные частоты вычисляются путем решения уравнения $D(\lambda) = 0$, где $D(\lambda)$ — знаменатель Фредгольма, в котором для приближенного решения оставляют лишь несколько первых членов, а первая собственная функция вычисляется методом итерации. Для практического проведения этого метода предлагается использование дифференциального анализатора и счетно-аналитических машин. Результаты расчета представлены в виде графиков; рассмотрены выводы с физической точки зрения.

М. Л. Бродский

3987. **Об итерационных методах, применяемых для решения систем линейных алгебраических уравнений. Попович** (Asupra metodei iteraţiei, aplicată la un sistem de ecuaţii lineare. Popovici Const. C.), Studii şi cercetări mat., 1953, 4, № 1—2, 233—247 (рум.; резюме русс., франц.)

Изучается скорость сходимости метода простых итераций, в зависимости от координат начального вектора, путем разложения последнего по базису из собственных векторов матрицы системы. Выписываются элементарные формулы для итерированных разностей. Указывается, что те же соображения переносятся с помощью известного приема на метод Зейделя. Ю. А. Шрейдер

3988. **Заметка о решении уравнений шестой степени. Миллингтон** (A note on the solution of the sextic equation. Millington G.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1954, 7, № 3, 357—366 (англ.)

Предлагается решать уравнение с действительными коэффициентами

$$f(z) = z^6 + az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = 0, \quad (1)$$

разлагая $f(z)$ на множители третьей степени:

$$f(z)=\left(z^3+\alpha z^2+\beta_1 z+\frac{l+m}{2}\right)\times \times\left(z^3-\alpha z^2+\beta_2 z+\frac{l-m}{2}\right). \quad (2)$$

Если (1) имеет действительные корни, то все коэффициенты в (2) можно считать действительными; в противном случае можно считать $\beta_2=\overline{\beta_1}$, $\alpha=\alpha' \cdot i$, $m=m' i$ (l, α', m' — действительны).

В первом случае, сопоставляя (1) и (2), имеем $\beta_{1,2}=\frac{a+\alpha^2}{2}\pm\frac{l-b}{2\alpha}$, где m, l, α связаны уравнениями

$$m=\frac{1}{\alpha}\left[\left(\frac{a+\alpha^2}{2}\right)^2-\left(\frac{l-b}{2\alpha}\right)^2-c\right], \quad (3)$$

$$\alpha^3+\alpha\left(a-\frac{2d}{l}\right)-m\left(1-\frac{b}{l}\right)=0, \quad (4)$$

$$l^2=4e+m^2 \quad (5)$$

(аналогично связаны m', l, α').

Если m_0, l_0, α_0 — одно из решений системы (3), (4), (5), то выбрав m_1, по возможности близкое к m_0, и определив из (5) и (4) соответствующие значения l_1 и α_1 (требуется осмотрительность, так как возможны шесть вариантов выбора l и α) после подстановки их в (3) получим $m_2=\varphi(m_1)$. Рекомендуется, найдя так же $m_3=\varphi(m_2)$, приближаться к m_0, используя чуть видоизмененный способ хорд. Приводится пример, иллюстрирующий быструю сходимость процесса.

А. П. Доморяд

3989. Корни трансцендентных уравнений. Кей (On roots of transcendental equations. Kay Alan F.), J. Appl. Phys., 1954, 25, № 6, 811 (англ.)

Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — корни полинома $1+\alpha_1 x+\cdots+\alpha_n x^n$, а $b_k=\lambda_1^{-k}+\cdots+\lambda_n^{-k}$, то $b_k=(-1)^k\times \times|d_{ij}|_{i,j=1}^{k}$, где $d_{i1}=i\alpha_i$, $d_{ij}=\alpha_{i-j+1}$ при $1<j\leqslant i$, $d_{i,i+1}=1$, $d_{ij}=0$ при $j>i+1$. Отношение b_{k-1}/b_k при больших значениях k в случае, если один из корней λ_i является наименьшим по модулю, близко к этому корню. Кроме метода приближенного вычисления корней, получена оценка для наименьшего модуля корня: $M/5\leqslant|\lambda_{\min}|\leqslant M$, где $M=\min_k|n/b_k|^{1/k}$, $1\leqslant k\leqslant n$. Результаты переносятся и на уравнения типа $1+\sum_{k=1}^{\infty}a_k x^k=0$; они даны без доказательства.

М. Л. Бродский

3990. Замечания о решении полного квадратного уравнения. Грело (Note sur la résolution de l'équation trinôme du 2e degré. Grelaud F.), Rev. géom.-experts et topogr. franç., 1954, 116, № 5, 292—296 (франц.)

Для быстрого получения с большой точностью при помощи логарифмической линейки корней квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ предлагается: а) получить на ней приближенные значения корней, сумма которых равна в точности $-p$, б) перемножив эти приближенные значения, вычесть из произведения q и внести поправку в корни (также подсчитываемую при помощи линейки). Приводится также номограмма для приближенного предварительного вычисления корней.

М. Л. Бродский

3991. Способ графического расчета нестационарных тепловых полей при помощи разностных методов. Бер (Beiträge zur graphischen Bestimmung nichtstationärer Temperaturfelder mit Hilfe des Differenzenverfahrens. Baehr H. D.), Forsch. Geb. Ingenieurwesens, 1954, B20, № 1, 16—19 (нем.)

Уравнение теплопроводности в цилиндрических ко динатах $u_t=a(u_{rr}+u_r/r)$ (и аналогичное уравнени сферических координатах, в предположении, что u висит только от r) решается разностным методом, а логичным методу для решения уравнения теплопров ности в декартовых координатах. Беря $\Delta t=\Delta r^2/2$ полагая $u_{nk}=u(r_n, t_k)$; $r_n=r_0+n\Delta r$; $t_k=t_0+k$ имеем: $u_{n,k+1}=\frac{1}{2}[(1+\Delta x/2r_n)u_{n+1,k}+(1-\Delta x/2r_n)\times u_{n-1,k}]$. Графически получим $u_{n,k+1}$, соединяя точ $(r_{n-1}, u_{n-1,k})$ и $(r_{n+1}, u_{n+1,k})$ прямолинейным отр ком и беря на нем точку с абсциссой $r_n+\Delta r^2/2$ Ординату этой точки, равную $u_{n,k+1}$, можно зат снова отложить на прямой, соответствующей абсци r_n. Краевые условия также легко истолковывают графически. Строится серия ломаных, изображающ $u(r)$ в последовательные моменты времени t_k ($k=0, 1, 2, \ldots$).

М. Л. Бродск

3992. Геометрическое интегрирование нелинейн дифференциальных уравнений с правой часть Каэн (Integration géométrique d'équations dif rentielles non linéaires du second ordre avec seco membre. Cahen Gilbert), Bull. Soc. frar électriciens, 1954, 4, sér. 7, № 37, 44—50 (фран

Для уравнения

$$\ddot{x}+b(x)\dot{x}+r(x)=0 \quad (1$$

Указывается способ построения интегральных крив на вспомогательной плоскости x, s, где $s=y+q$ (зде и в дальнейшем $y=\dot{x}$, $q=\int b(x)\,dx$). Уравнению (1) плоскости x, s соответствует уравнение

$$\frac{ds}{dx}=-\frac{r}{y}=\frac{r}{q-s}. \quad (1$$

Направление поля уравнения (2) в произвольно точке $S(x, s)$ перпендикулярно прямой RS (координ тами точки R являются $x-r$ и q), причем точ $R(x-r, q)$ легко находится геометрически с помощ вычерченных на плоскости x, s двух кривых, (Q) и $($ являющихся множествами точек $Q(x, q)$ и $R(x-r,$ соответственно.

Для уравнения (2), кроме того, рассматриваютс а) построение центров кривизны интегральной крив б) градуировка траектории в функции времени, в) ос бые точки и вопросы поведения интегральных крив (частично описательно).

Предложенный способ графического интегриро ния обобщается для уравнений вида

$$\ddot{x}+a(x)\dot{x}^2+b(x)\dot{x}+r(x)=0, \quad (1$$

$$\ddot{x}+b(x)\dot{x}+f(\dot{x})+r(x)=0, \quad (1$$

$$\ddot{x}+b(x)\dot{x}+r(x)=g(t), \quad (1$$

причем выполнение построений усложняется. Наприм для построения интегральных кривых уравнения требуется вычертить три вспомогательные кривые: на подвижной прозрачной плоскости (транспаранте) одну на неподвижной плоскости. Интегральная кри при этом вычерчивается на транспаранте. А. В. Драги

3993. Графическое и численное исследование выну денных колебаний системы, состоящей из девя масс. Курцеман (Graphical and numerical vestigation of forced vibrations of a nine-mass syste Kurzemann W.), Engrs'Digest, 1954, 15, № 51—54, 68 (англ.)

См. РЖМех, 1954, 4693.

3994. О графическом решении одного класса диф ренциальных уравнений. Кламкин, Рассе

(On a graphical solution of a class differential equations. Klamkin M. S., Russell J. P.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 3, 188—189 (англ.)

Способ нахождения направлений касательных в дискретных точках поля, определяемого дифференциальным уравнением вида $dy/dx = (\varphi(y)+x)/(\psi(x)+y)$, данный ранее (РЖМат, 1955, 443), распространен на уравнения вида $dy/dx = (\psi(x)+y)/(\varphi(y)+x)$, где $\psi(x)$ и $\varphi(y)$ суть данные непрерывные функции.

Строятся кривые $\Gamma_1(x = -\varphi(y))$ и $\Gamma_2(y = -\psi(x))$. Через произвольную точку $P(x, y)$ проводится прямая, параллельная x-оси, до пересечения в точке A с Γ_1 и прямая, параллельная y-оси, до пересечения в точке B с Γ_2. Прямая PD, проходящая через среднюю точку D отрезка AB, дает искомое направление касательной в точке P. Если точка D взята так, что $AD : AB = K : (K+1)$, то PD дает направление касательной, соответствующее уравнению $dy/dx = K(\psi(x)+y)/(\varphi(y)+x)$. При $K = -1$ $PD \parallel AB$. В этом случае уравнение решается в квадратурах.

Ссылки на опубликованные ранее работы отсутствуют.

А. Б. Штыкан

3995. О графическом решении линейного дифференциального уравнения первого порядка. Клamкин (On a graphical solution of the first order linear differential equation. Klamkin M. S.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 8, 565—567 (англ.)

Данные ранее (РЖМат, 1955, 443, 3994) графические построения для решения дифференциальных уравнений вида $dy/dx = (\varphi(y)+x)/(\psi(x)+y)$ и $dy/dx = (\psi(x)+y)/(\varphi(y)+x)$ видоизменены для решения уравнения $dy/dx = (y - F(x))/(x - G(F(x)))$, к которому может быть приведено линейное дифференциальное уравнение $dy/dx + P(x)y = Q(x)$ подстановкой

$$F(x) = Q(x)/P(x),\ G(F(x)) = (1/P(x)) + x.$$

Пусть кривая C_1 имеет уравнение $y = F(x)$, а C_2 — $x = G(y)$. Через произвольную точку $P(x, y)$ проводятся $PA \parallel OY$ и $AB \parallel OX$; A лежит на C_1, B — на C_2. Направление BP является искомым. Для перехода от каждой точки к последующей в конечных интервалах Δx рекомендуется первое приближение по Эйлеру. Аналогичное решение дано и для уравнения $dy/dx = (\varphi(x) - G(y))/(\psi(x) - F(y))$.

А. Б. Штыкан

3996. Алгоритм получения логарифма. Шанкс (A logarithm algorithm. Shanks Daniel), Math. Tables and Other Aids Comput., 1954, **8**, № 46, 60—64 (англ.)

Описывается алгоритм разложения $\log_{a_0} a_1$, где $a_0 > 1$, $a_1 > 1$, в непрерывную дробь, приспособленный к автоматическим быстродействующим машинам. Используются шесть ячеек запоминающего устройства A, B, C, D, E, F, в которые заносятся вначале величины $(A) = a_0$, $(B) = a_1$, $(C) = (F) = 1$, $(D) = (E) = 0$. Алгоритм сводится к последовательному повторению следующих операций:

I. Если $(A) \geqslant (B)$: занести $(A)/(B)$ в A, $(C)+(E)$ в C, $(D)+(F)$ в D.

II. Если $(A) < (B)$: поменять местами (A) и (B), (C) и (D), (E) и (F).

После каждой операции II $(E)/(F)$ дает новое приближение для $\log_{a_0} a_1$.

Опираясь на некоторые результаты Хинчина, автор показывает, что для почти всех a_0 и a_1 погрешность убывает приблизительно как $(1/9{,}1)^n$, где n — число приближений. Если a_0 или a_1 меньше единицы, алгоритм сохраняется с добавлением в начале замены величины меньшей единицы на обратную и умножением $(E)/(F)$ от каждой такой замены на -1.

К. А. Семендяев

3997. Операции над комплексными числами на вычислительной машине с единственным множительным устройством. Бёш (Das Rechnen mit komplexen Zahlen auf einer Multipliziermaschine mit nur einem Multiplizierwerk. Boesch W.), Regelungstechnik, 1953, **1**, № 12, 270—274 (нем.; резюме англ.)

Показана возможность и выгодность выполнения 4 арифметических действий над комплексными числами на любой вычислительной машине, допускающей выполнение этих действий над многозначными числами. Чтобы вести вычисление над комплексными числами вида $R + iX$, где числа R и X имеют до n значащих цифр, нужна машина, допускающая установку чисел с $3n+1$ цифрами: первые n мест слева используются для установки числа R, на следующих $n+1$ местах ставятся нули, на остальных n местах — цифры числа X. Так, на машине емкостью $10 \times 10 \times 20$ цифр (для примера взят автоматический арифмометр «Мадас») числа $3+4i$ и $5+11i$ устанавливаются как числа 003′0000′004 и 005′0000′011. Производя обычным порядком сложение этих последних чисел, получаем натуральное число 008′ 0000′ 015, изображающее сумму двух данных комплексных чисел $8+11i$. Обычное умножение дает число 000015′0000053′0000044, которое расшифровывается как произведение данных комплексных чисел $(15—44)+53i = -29+53i$. Деление сводится к умножению путем предварительного умножения делимого и делителя на число, сопряженное с делителем. Показано, как преодолеть различные осложнения, возникающие на практике.

В. М. Брадис

3998. Замечание об экстраполяции. Шерман (A note on extrapolation. Sherman Leon), Bull. Amer. Meteorol. Soc., 1954, **35**, № 5, 234—235 (англ.)

Если положение некоторой системы в момент t_n характеризуется точкой на плоскости, соответствующей радиус-вектору $\mathbf{r}_n$, то автор рекомендует проводить экстраполяцию по формуле $\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_{n-2} + 3(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1})$, которая точна, если $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{b}t + \mathbf{c}t^2$. Такая экстраполяция легко осуществляется графически.

М. Л. Бродский

3999. Связь между коэффициентами и свободными членами условных уравнений и уравнений погрешностей. Юршанский З. М., Тр. Новосибир. ин-та инж. геод., аэрофотосъемки и картогр., 1954, **6**, 29—38

Для уравнивания результатов измерений методом посредственных измерений исходят, как известно, из уравнений погрешностей вида $Ax + l = v$, $v^2 = \min$ (x — искомый вектор, v — вектор поправки к l). Для решения этой же задачи методом условных наблюдений составляются условные уравнения вида $Cv + d = 0$, $v^2 = \min$. Отсюда сразу получается, что $CA = 0$, $Cl + d = 0$. Эти равенства могут иметь практическое применение для контроля вычислений при уравнивании геодезических сетей. Приводятся числовые примеры такого применения.

В. В. Попов

4000. Метод связующих (узловых) фигур для решения нормальных уравнений при уравнивании больших сетей. Беляев (Metodo de las figuras de enlace para resolver las ecuaciones normales on la compensacion de grandes redes. Beljajew N.), Bull. Geod., 1953, № 28, 95—137 (исп.)

См. РЖАстр, 1955, 1248.

4001. Графическая интерполяция логарифмов и антилогарифмов чисел. Гарр (Interpolation graphique des logarithmes et des antilogarithmes des nombres. Garres Pierre), Rev. géom.-experts et topogr. franç. 1954, **116**, № 7, 423—427 (франц.)

Приводится номограмма (абак Декарта) для производства линейной интерполяции при логарифмирова-

нии и потенцировании. Номограмма реализует формулу

$$\Delta \log N \approx M \frac{\Delta N}{N}.$$

Г. Е. Джемс-Леви

4002. Расчет и построение номограмм в технике. Стивенсон (The calculation and construction of nomograms in engineering. Stephenson H. W.), Civil Engng and Public Works Rev., 1954, **49**, № 577, 714—716; № 578, 849—851; № 579, 951—952 (англ.)

В статье пропагандируются номограммы из выравненных точек. В первой части изложены элементарные сведения о построении таких номограмм. Приведен пример, иллюстрирующий преимущество номограмм из выравненных точек по сравнению с номограммами сетчатого типа. Рассмотрен пример построения номограмм с параллельными шкалами. Во второй части приведены другие примеры построения номограмм из выравненных точек. Автор применяет детерминантный метод построения номограмм. Преобразования номограмм сводятся к видоизменению столбцов и строк детерминанта Copo. В последнем примере параметры преобразования в общем детерминанте Copo находятся из условия, что 4 заданные точки номограммы переходят в углы квадрата. В третьей части приводится ряд примеров конструирования и расчета номограмм различных типов (из выравненных точек, с прямоугольным индексом). Г. С. Хованский, Г. Е. Джемс-Леви

4003. Калькулятор для *G* нагрузок. Содаро (Calculator for *G* loadings. Sodaro Joseph F.), Prod. Engng, 1953, **24**, № 12, 213 (англ.)

Приводится номограмма с параллельными логарифмическими шкалами для определения ускорения силы тяжести g, которое получается в специальных центробежных установках при работе с моделями.

Формула $g = 0{,}284N^2 \cdot R \cdot 10^{-4}$, где R — радиус вращения в дюймах, N — число оборотов в 1 мин. R изменяется от 1 до 30, а N — от 1 до 3000. Особенностью номограммы является двойная система шкал. Шкалы R и N проградуированы с двух сторон. Слева деления нанесены в меньшем масштабе, но в полных, заданных пределах. Ответ читается на шкале g', проградуированной только степенями десяти. Эта шкала дает порядок величины g. Правые стороны шкал N и R проградуированы в одинаковом (более крупном) масштабе в пределах от 1 до 10. Им соответствует шкала g'', на которой читаются значащие цифры величины g. Таким образом, для получения g нужно прикладывать линейку 2 раза: первый — для получения значащих цифр и второй — для определения положения запятой.

В результате при достижении максимальной точности имеем ответ, изменяющийся в очень больших пределах от 10^{-5} до 10^4. И. Н. Денисюк

4004. Графическое представление математических зависимостей. Дейвис, Холл (Graphic presentation of mathematical equations. Davis John R., Hall Carl W.), Agric. Engng, 1954, **35**, № 6, 385—388 (англ.)

Приводятся элементарные сведения о номограммах из выравненных точек. Приведена библиография по номографии (19 названий) и список статей по приложению номографических методов, помещенных в журнале «Agric. Engng» (14 названий). Г. С. Хованский

4005. Библиотека по численному анализу. Форсайт (A numerical analyst's fifteen-foot shelf. Forsythe George E.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1953, **7**, № 44, 221—228 (англ.)

Соображения о содержании библиотеки по численному анализу. Приводится список (150 названий) книг по математике и ее приложениям.

4006 К. Номограмма для извлечения корня и возведения в степень. Лефруа (Abaque d'extraction de racines et d'élévation aux puissances d'un nombre quelconque. Lefroid L., Paris, Gauthier-Villars, 1953), Bull. Soc. ingrs. civils France, 1954, **1**, 41 (библ.)

4007 Д. Приближенное решение задачи о собственных значениях для дифференциальных операторов с частными производными методом конечных разностей. Саульев В. К. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1954

4008 Д. Расчет кинетики цепного крекинга газообразных парафиновых углеводородов на основе приближенного интегрирования кинетических уравнений по методу С. А. Чаплыгина. Бахарева И. Ф. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Саратовск. ун-т, Саратов, 1954

4009 Д. Исследование некоторых вопросов при решении методом конечных разностей задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Пуассона. Волков Е. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1954

4010 Д. Об одном классе точных решений в цилиндрических функциях уравнений равновесия упругого тела. Цай А. Г. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ин-т матем. и механ. АН УзССР, Ташкент, 1954

См. также: 3543, 3593, 3613, 3711, 3719, 3773 К, 3774 К, 3778, 3787, 3859, 3865, 3873, 3943, 4018, 4021, 4029

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

4011. Матричные методы анализа релейно-контактных схем по условиям несрабатывания. Поваров Г. Н., Автоматика и телемеханика, 1954, **15**, № 4, 332—335

Для анализа (и синтеза) релейно-контактных схем по условиям их несрабатывания известные матричные методы (Лунц А. Г., Изв. АН СССР, сер. матем., 1952, **16**, № 5, 405—436) видоизменяются согласно принципу двойственности, имеющему место в булевой алгебре.

Отмечается, что определители первого и второго рода, определение которых дано в заметке, рассматривались еще в 1938 г. (Kobrzyński Z., C. r. des séanses de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, cl. III, 1938, **30**) под названием «логических определителей» и что определители первого рода нашли применение в уже известных матричных методах анализа и синтеза релейно-контактных схем по условиям их срабатывания. В заметке показывается, как можно применить определители второго рода для анализа контактных схем. В. И. Шестаков

4012. Математическая теория синтеза контактных $(1, k)$-полюсников. Поваров Г. Н., Докл. АН СССР, 1955, **100**, № 5, 909—912

Излагается математическая теория синтеза контактных $(1, k)$-полюсников, являющаяся обобщением теории, построенной Шенноном (Shannon C. E., BSTJ, 1949, **28**, № 1, 59) для синтеза контактных двухполюсников. Вводится ряд определений, в терминах которых формулируется шесть теорем, дающих оценки сверху и снизу минимального числа контактов в наиболее сложных $(1, k)$-полюсниках. Вкратце описывается метод синтеза $(1, k)$-полюсников, названный автором методом каскадов. В качестве примера применения метода каскадов приводится схема сравнения двоичных чисел, построен-

ная этим методом. Далее определяются некоторые частные классы булевых функций. Булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ автор называет особенной относительно x_i, если $f = \widetilde{x}_i f' + f''$, где $\widetilde{x}_i$ есть x_i или $\overline{x}_i$, а f' и f'' не зависят от x_i. Функция f называется особенной, если она является особенной хотя бы относительно одного аргумента, и совершенно особенной, если она является особенной относительно каждого аргумента. Функция, представимая без инверсий, называется монотонно неубывающей. Сформулированы следующие теоремы относительно этих функций.

Теорема 7. Почти все функции неособенные.

Теорема 8. Функция является совершенно особенной тогда и только тогда, когда она одного типа (в смысле статьи Pólya G., J. Symbolic Logic, 1940, 5, № 3, 98) хотя бы с одной монотонно неубывающей функцией.

Теорема 9. Любая функция, реализуемая с независимыми контактами (т. е. схемой, в которой каждая переменная управляет не более чем одним контактом), является совершенно особенной; обратное неверно.

В конце заметки сформулированы две теоремы, одна из которых дает оценку числа N_n типов булевых функций n переменных, а другая несколько улучшает существовавшую до сих пор оценку $L(1, 5) \leqslant 30$, заменяя ее следующей оценкой: $L(1, 5) \leqslant 28$, где под $L(k, n)$ понимается такое наименьшее целое число, что любая последовательность k булевых функций n переменных может быть реализована не более чем с $L(k, n)$ контактами.

См. также РЖМат, 1955, 458, 459.

Примечание референта. В последних двух неравенствах в тексте заметки вместо $L(1, 5)$ ошибочно напечатано $L(1, 4)$. В. И. Шестаков

4013. Основные формулы синтеза релейных схем. Гаврилов М. А., Автоматика и телемеханика, 1954, 15, № 6, 521—537

Проводится общее рассмотрение синтеза многотактных схем. Исследуется задача определения реализуемости таблицы включения как для отдельных элементов схемы, так и для всей схемы. Реализуемость таблицы включения определяется посредством составления таблицы номеров конституент единицы, характеризующих состояние элементов схемы в соответствующих тактах. Таблица включения реализуема, если для любого элемента X ни один из тактов, в которых его цепь включения замкнута, не повторяется в тактах, в которых его цепь включения разомкнута. Если это условие не соблюдается, то таблица является нереализуемой. Для перевода нереализуемых таблиц в реализуемые предлагаются два способа: а) добавление дополнительных промежуточных реле; б) использование реле, замедленных на включение или на отключение. Автор отмечает, что последний способ «не всегда приводит к желаемому результату».

Сформулированы следующие правила выделения из общего числа элементов таблицы тех, которые должны участвовать в цепях данного элемента. Для этого: а) исходя из заданной таблицы включения, составляют для каждого из элементов новую таблицу включения, содержащую только элементы, изменяющие свое положение в тактах срабатывания и отпускания; б) если какая-нибудь из этих таблиц включения получается нереализуемой, то подыскивают из числа имеющихся в общей таблице такие элементы, которые делают ее реализуемой, и добавляют их в данную таблицу включения.

Рассмотрены алгебраические соотношения, позволяющие осуществлять переход от таблиц включения к первоначальным формулам, и в качестве основных формул синтеза релейных схем предлагаются следующие формулы:

$$F_{(X)} = F_з = f'_{ср} + x F'_з, \quad F_{(X)} = F_з = f'_{ср} + \overline{x} f'_{отп},$$

$$F_{(X)} = F_з = \overline{x}\overline{F}'_p + x F'_з, \quad F_{(X)} = F_з = \overline{x}\overline{F}'_p + x f'_{отп},$$

$$F_{(X)} = \overline{F}_p = \overline{(f'_{отп} + x F'_p)} = \overline{f}'_{отп}(x + \overline{F}'_p),$$

где $f'_{ср}$ и $f'_{отп}$ — цепи, замкнутые соответственно в тактах срабатывания и отпускания реле X, $F'_з$ — совокупность цепей, замкнутых в течение тактов срабатывания и включенного состояния реле X, а F'_p — совокупность цепей, замкнутых в течение тактов отпускания и разомкнутого состояния реле X. Штрихи над обозначениями этих цепей указывают на то, что эти цепи не содержат контактов x и $\overline{x}$ реле X. Черта служит для обозначения операции инверсии, а знаки сложения и умножения — знаками параллельного и последовательного соединения двухполюсников.

Даны два примера синтеза многотактных схем. В одном примере показано построение схемы по реализуемой таблице; в другом рассмотрены случаи перевода нереализуемой таблицы в реализуемую путем введения дополнительного элемента и путем введения реле с замедлением на отключение. В. И. Иванов

4014. Об основах алгебры логики и ее применениях к теории схем. Шлибс (Über die Grundlagen der Algebra der Logik und ihre Anwendung in der Schaltungstheorie. Schliebs Günter), Funk und Ton, 1954, 8, № 2, 57—71 (нем.)

Кратко и популярно излагаются элементы алгебры логики и теории контактных схем. Предпоследний раздел посвящен вопросам общей теории схем. Здесь дается алгебраический способ представления структуры контактных схем с конечными сопротивлениями. В заключение указывается на важность логического аппарата для машинной математики.

Библиография, 16 названий. С. В. Яблонский

4015. Алгебра состояний и событий. Беркли (The algebra of states and events. Berkeley Edmund C.), Scient. Monthly, 1954, 78, № 4, 232—242 (англ.)

Популярно и кратко излагаются основные элементы алгебры, отличающейся от обычной (двухэлементной) булевой алгебры тем, что в ней все переменные являются двоичными функциями времени, т. е. функциями, принимающими два значения: 0 и 1. Эти функции не определены в моменты перехода от значения 0 к значению 1 и в моменты обратного перехода.

Кроме операций булевой алгебры, рассматриваются также несколько небулевых операторов, из которых основными являются следующие два: оператор задержки (delay operator) $D^{+k}p$, преобразующий функцию $p(t)$ в функцию $p(t+k)$, и оператор Hp, имеющий смысл предиката «p произошло» (p has happened) и определяемый рекуррентным соотношением $Hp = p \vee D^m Hp$, где $\vee$ — знак булева сложения, а m — минимальный промежуток времени, необходимый для перехода контакта реле из одного положения в другое. Остальные небулевы операторы определяются через эти два оператора и операции булевой алгебры $p \vee q$ (булево сложение p или q), $p \cdot q$ (умножение p и q) и $Np = p'$ (отрицание p или дополнение p до 1) — следующим образом:

$$Ap = Np \cdot Hp, \quad Bp = NHp, \quad Ep = p \cdot ND^m p, \quad Fp = Np \cdot D^m p,$$

$$C(p, q) = Fp \cdot Eq, \quad Ip = p, \quad T^1 p = I \cdot NH(N \cdot H)(p),$$

$$H^2 p = H[I \cdot H(N \cdot H)](p).$$

Смысл всех вводимых в статье операторов достаточно подробно объясняется и наглядно иллюстрируется графиками, обычно применяемыми в теории релейных схем. В конце статьи даны два примера применения «алгебры состояний и событий» к релейно-контактным схемам. В. И. Шестаков

4016. Алгебра многозначной логики в кибернетике автоматических цифровых вычислений. Б а д и л ь о - Б а р а л л а (El àlgebra de la lógica polivalente en la cibernética del càlculo automàtico aritmético. B a d i l l o B a r a l l a t M. C.), Rev. cálculo automát. y cibernét., 1954, **2**, № 6, 3—17 (исп.; резюме франц.)

Первая из серии статей по применению алгебры многозначной логики к исследованию электронных вычислительных схем. Указывается, что для исследования вычислительных машин, построенных из «n-зубчатых электронных колес» (т. е. кольцевых электронных схем с n устойчивыми состояниями), должна применяться n-значная логика. Отмечаются перспективы развития таких машин в связи с новыми кольцевыми схемами (González del Valle A., Rev. cálculo automát. y cibernét., 1952, №№ 1, 3). Излагается алгебра многозначной логики, обобщающая булеву алгебру. Основные операции: $x+y$, xy, $-x$, x'. Излагаемая алгебра строится аксиоматически, но постулаты сформулированы недостаточно ясно. Дается краткий обзор работ по многозначной логике (Хемпел, Тэркуетт, Уэбб, Стоун).

Библиография, 67 названий.

П р и м е ч а н и е р е ф е р е н т а. В статье используется терминология кибернетики. Много опечаток. Библиография и обзор работ по многозначной логике носят случайный характер и включают проблематику, не связанную со схемными приложениями. В то же время не указаны предыдущие работы по применению многозначной логики к теории схем с многопозиционными переключателями, в частности работа В. И. Шестакова (Изв. АН СССР, сер. матем., 1946, **10**, № 6, 529—554), где этот вопрос был рассмотрен впервые. Г. Н. Поваров

4017. Теоретико-структурные свойства замыкающих переключательных функций. Г и л б е р т (Lattice theoretic properties of frontal switching functions. G i l b e r t E. N.), J. Math. and Phys., 1954, **33**, № 1, 57—67 (англ.)

Изучается класс булевых функций, представимых без отрицания или с небольшим числом отрицаний, и реализация функций этого класса релейно-контактными схемами. Используются определения и понятия, введенные в следующих работах: Биркгоф Г., Теория структур, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1952; Keister W., Ritchie A. E., Washburn S. H., The design of switching circuits, Van Nostrand, 1951.

Состоянием n реле называется последовательность n двоичных разрядов $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i=1$, если i-е реле включено, и $x_i=0$ в противном случае. По определению, $x \leqslant y$, если $x_i \leqslant y_i$ для всех i. Множество всех 2^n состояний n реле является булевой структурой B^n.

Состоянием полюсов называется разбиение множества N чисел $(1, 2, 3, \ldots, N)$ на непересекающиеся группы. Множество состояний полюсов есть структура разбиений $P(N)$, если под $\pi_1 \leqslant \pi_2$ понимать, что состояние π_1 порождено состоянием π_2 (является его подразбиением). Состояние полюсов π контактного N-полюсника с n приемными элементами есть функция состояния реле x, $\pi=f(x)$, отображающая B^n в $P(N)$. Существует $(\Phi(N))^{2^n}$ таких функций, где $\Phi(N)$ — число состояний полюсов.

Замыкающей (frontal) схемой называется схема, в содержащая размыкающих (back) контактов, замыкающей (frontal) функцией — переключательная функция замыкающей схемы. Замыкающие (frontal) контакты часто бывает легче осуществить, чем размыкающие.

Т е о р е м а 1. Для того чтобы N-полюсная переключательная функция f была замыкающей, необходимо и достаточно, чтобы при любых x и y из $x \leqslant y$ следовало $f(x) \leqslant f(y)$.

С л е д с т в и е. Понятие замыкающей функции совпадает с понятием изотонного отображения B^n в $P(N$

По определению, $f_1 \leqslant f_2$, если $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ для все $x \in B^n$. Множество всех замыкающих функций образует структуру $F=(P(N))^{B^n}$.

Т е о р е м а 2. Пусть P — частично упорядоченная система, состоящая из некоторых разбиений N полюсов с отношением порядка из $P(N)$. Для существования замыкающей схемы, способной производить все состояния полюсов из P и использующей только n реле, необходимо и достаточно существование изоморфизма между P и некоторым подмножеством B^n.

Теорема 2 доказывается конструктивно, однако для сложных систем P нахождение изоморфизма между P и частью B^n затруднительно. В этом случае теорема 2 дает нижнюю границу для n даже тогда, когда этот изоморфизм не может быть найден.

Булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является замыкающей двухполюсной функцией тогда и только тогда, когда она представима выражением, содержащим только операции сложения («или») и умножения («и»). Поэтому замыкающие двухполюсные функции суть элементы свободной дистрибутивной структуры $FD(n$ порожденной n символами: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Приводится число $\psi(n)$ элементов $FD(n)$ для $n \leqslant 6$; для $n >$ указываются его границы.

Т е о р е м а 3. $2^{C_{n,\,[n/2]}} \leqslant \psi(n) \leqslant n^{C_{n,\,[n/2]}}+2$, где $C_{n,\,[n/2]}$ есть число сочетаний из n по $[n/2]$. Для больших n лучшие границы дает оценка:

$$\sqrt{2/\pi n}\,2^n \leqslant \log_2 \psi(n) \leqslant \sqrt{2/\pi n}\log_2 n 2^n.$$

При доказательстве теоремы 3 используется лемма

Л е м м а 1. Существует $C_{n,\,[n/2]}$ цепей в B^n, идущих от $(0, 0, \ldots, 0)$ к $(1, 1, \ldots, 1)$ так, что каждый элемент из B^n принадлежит по крайней мере одной цепи.

Эта лемма применима также к сортировке массивов перфорированных карт.

Т е о р е м а 4. Доля всех замыкающих функций, реализуемых менее чем с $(1-\varepsilon)(\log_2 \psi(n))/n$ контактами, где $\varepsilon > 0$, стремится к 0 при $n \to \infty$.

Всякую незамыкающую (non-frontal) функцию $f(x$ можно представить в виде $f(x)=F(x_1, x_2, \ldots, x_n, g_1', g_2', \ldots, g_s')$, где F — замыкающая функция, определенная на B^{n+s}, и g_k — замыкающая функция переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, g_1', g_2', \ldots, g_{k-1}'$. Исследуется задача минимизации числа s, определяющего число размыкающих контактов в реализации $f(x)$. В минимальном случае $s(n) \leqslant \log_2 n$, причем $\log_2 n$ можно заменить на $K(n)\log_2 n$, где $K(n)$ колеблется около нуля при $n \to \infty$. Для больших n $s(n) \approx {}^1/_2 \log_2 n$.

В. М. Остиан

4018. Некоторые принципы соединения решений физических систем. К р о н (A set of principles to interconnect the solutions of physical systems. K r o n G a b r i e l), J. Appl. Phys., 1953, **24**, № 8, 965—980 (англ.)

Предлагается метод решения уравнений математи-
ской физики, состоящий в разбиении физической
стемы на подсистемы, раздельном решении уравне-
й этих подсистем и соединении полученных реше-
й в искомое решение уравнений всей системы. Ме-
дика разбиения и восстановления искомого решения
нована на интерпретации уравнений математической
зики в терминах электрических схем и применении
электросхемным моделям так называемой тензорной
ории преобразований схем, предложенной автором
нее. Моделирующие схемы могут не иметь физи-
ской реализации. По словам автора, метод применим
дифференциальным уравнениям в частных производных,
быкновенным дифференциальным уравнениям и системам
гебраических уравнений и при некотором обобщении
зволяет с помощью существующих цифровых вычис-
тельных машин решать физические системы с десятка-
ми и даже сотнями тысяч переменных. Как пример
рассматривается краевая задача для уравнения Пуассона.

Примечание референта. Материал излагается нестрого и неточно. Автор ссылается почти исключительно на свои работы. Следует отметить, что тензорная теория преобразований схем Крона подвергалась критике в советской печати (см., например, Максимович Н. Г., Электричество, 1952, № 11, 56—57) как необоснованная и содержащая ошибки.

Г. Н. Поваров

4019. **Электролитическая ванна для решения задач по теории сетей.** Мет (Ein Elektrolyttrog zur Lösung von Netzwerkproblemen. Met V.), Frequenz, 1955, **9**, № 2, 57—63 (нем.)

См. также: 3669

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

20. **Опыт эксплуатации машины РАЙДАК.** Дин (Operating experience with Raydac. Dean Franklin R.), Rev. of input and output eqipment used in computing systems. Joint AIEE — IRE — ACM Computer Conference, 1952, New York, 1953, 77—80 (англ.)

Приемные испытания вычислительной машины АЙДАК (Raydac) производились с 4/VI по 19/VII 52 г. в течение пяти циклов (каждый цикл занимал дня). Испытания были разбиты на 3 этапа. На первом апе выполнялись тестовые программы, проверявие все элементы машины при выполнении различных ераций.

Для проверки правильности подготовки исходных нных команды и числа пробивались на перфоленту, перфоленты записывались на магнитную ленту и нее отпечатывались. Полученные таким образом зультаты сравнивались с первоначальными данными. адежность работы печатающего устройства проверясь при печати большого количества различных, вестных заранее, таблиц. Для проверки надежнои работы устройства управления и оперативного поминающего устройства было составлено 15 отдельх программ, по которым производилась проверка ыполнения различных операций и выбор адресов. ри правильной работе машины тестовые программы томатически следовали одна за другой. Кроме того, роверялись возможности оперативного запоминаюего устройства в отношении длительного хранения нных. Для этого в оперативное запоминающее устройво засылались различные команды и числа. Через ждые 15 мин. эти данные поступали на выходное чатающее устройство и сравнивались с первоначальми значениями.

Правильность работы арифметического устройства оверялась 26-ю различными тестовыми программа-, причем среди них были индивидуальные програмы для каждой арифметической операции. Например, ограмма включала 1000 сложений или 1000 вычиний. Если каждый тест проходил правильно, ма-ина автоматически переходила к следующему тесту. случае ошибки происходил останов на неправильно полненной команде.

На первом этапе тестовых испытаний программы, являющие надежность работы отдельных узлов шины, непрерывно выполнялись без сбоев 1÷2 часа. омимо этих программ составлялись тесты, выявляюие скорость работы машины. Так, например, был ставлен тест для проверки скорости выборки адресов, состоящий из 5 команд. Машина выполняла 8200 команд в 1 сек.

На втором этапе производилось вычисление функции вида $Q = f_1(x, y)/f_2(x, y)$ (где f_1 и f_2—полиномы) для многих значений x и y. Для ввода использовалась магнитная лента, на которой было записано 1800 групп, содержащих 57 600 значений x и y. Результаты вычислений были выведены на магнитную ленту и затем отпечатаны и сверены с ручным просчетом.

На третьем этапе производилось решение системы из 14 нелинейных дифференциальных уравнений. Решение этой задачи заняло около 8 часов. 3% всех результатов вычислений было сверено с результатами, полученными при решении этой же задачи на другой машине.

А. С. Федоров

4021. **Вычисление собственных значений и собственных векторов симметричных матриц на цифровой вычислительной машине ИЛЛИАК.** Грегори (Computing eigenvalues and eigenvectors of a symmetric matrix on the ILLIAC. Gregory Robert T.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1953, **7**, № 44, 215—220 (англ.)

Для вычисления используется метод поворота осей в комбинации с итеративным процессом (РЖМат, 1955, 1519). Метод состоит в проведении ряда ортогональных преобразований над матрицей, каждое из которых обращает в нуль один из выбранных внедиагональных элементов. Голдстайн показал, что сумма квадратов внедиагональных элементов после одного преобразования уменьшается на величину $2a^2_{ij}$, где a_{ij}— элемент, который в результате преобразования становится нулем. Процесс дает последовательность матриц, пределом которой является диагональная матрица.

Автор показывает на многих примерах, что программа составлена таким образом, что позволяет число преобразований, необходимых на практике, уменьшить в 10—20 раз.

Собственные векторы получаются перемножением ортогональных матриц, используемых в последовательных приближениях. На машине ИЛЛИАК существуют три программы вычисления собственных чисел и векторов вещественной матрицы, работающих по этому принципу. Наиболее быстрая программа требует 190 ячеек запоминающего устройства. Матрицу 20-го порядка она преобразует за 6 мин. 39 сек. при 1330 преобразованиях. Другая программа ту же матрицу преобразует за 15 мин. 18 сек. при 1154 преобразованиях, но дает более высокую точность. Третья

программа преобразует матрицу за 19 мин. 34 сек. при 683 преобразованиях, а точность более высокая, чем у двух первых. Приведена таблица времени работы для 35 матриц. Л. Н. Королев

4022. Теория логических сетей. Беркс, Райт (Theory of logical nets. Burks Arthur W., Wright Jesse B.), Proc. I. R. E., 1953, **41**, № 10, 1357—1365 (англ.)

Целью статьи является формальное обоснование приложения алгебры логики к цифровым счетным устройствам при помощи понятия логической сети. Первичные элементы сети: 1) производящий элемент (п. э.), изображаемый в виде ячейки с двумя входными каналами g, h и одним выходным каналом f; 2) задерживающий элемент (з. э.) с одним входным каналом g и одним выходным каналом f. Каждый канал имеет одно из двух возможных состояний (0, 1), наблюдаемых для дискретных значений времени: $t = 0, 1, 2, \ldots$, т. е. каналам $g, h, f, \ldots$ отвечают функции от натурального аргумента $g_t, h_t, f_t, \ldots$, принимающие значения 0, 1. П. э. реализует функцию Шеффера $f_t = \sim g_t V \sim h_t$; з. э. реализует функцию $f_0 = 0$; $f_{t+1} = g_t$.

Если в конечном наборе первичных элементов соединить некоторые каналы своими свободными концами (не примыкающими к ячейкам), то получится логическая сеть. Узлом сети называется точка, общая для одного или нескольких концов каналов. Узел называется входным, если все соединенные с ним каналы являются входными, и выходным в прочих случаях. С точки зрения физической реализуемости представляют интерес лишь правильные сети, т. е. сети, обладающие свойствами: 1) состояние любого канала однозначно определено свойствами первичных элементов; 2) все каналы, соединенные в одном узле α, пребывают одновременно в одном и том же состоянии (каждый из этих каналов будет обозначаться в таком случае тем же символом, что и сам узел).

Правильная сеть [(пр. с.) характеризуется тем, что каждой последовательности функций $\alpha_t^1, \ldots, \alpha_t^J$, поданных на входные узлы $\alpha^1, \ldots, \alpha^J$, соответствует единственная последовательность функций $\beta_t^1, \ldots, \beta_t^K$ на выходных узлах, т. е. сеть реализует преобразование функций α_t^i в функции β_t^k. Приводится пример пр. с., реализующей «предсказывающее преобразование», т. е. $\beta_t = \alpha_{t+1}$, которое физически не осуществимо; это обстоятельство оправдывает выделение более узких классов детерминированных сетей (д. с.) и вполне правильных сетей (в. пр. с.), которые лучше отражают работу физических вычислительных устройств.

Характеристическое свойство д. с.: любой конечной последовательности состояний $\alpha_0^1, \ldots, \alpha_0^J; \ldots; \alpha_t^1, \ldots, \alpha_t^J$ $(t \geqslant 0)$ отвечает единственная последовательность состояний на выходе: $\beta_t^1, \ldots, \beta_t^K$. Иными словами: показания выходных узлов в данный момент времени t не зависят от состояния входов в последующие моменты времени.

Свойства детерминизма также недостаточно для физической реализуемости сети, ибо оно не отражает того физически существенного обстоятельства, что состояния входных каналов являются причиной состояния на выходе п. э., а не наоборот. Физическая реализуемость обеспечена в классе в. пр. с., который определяется рекурсивно, отправляясь от изолированных первичных элементов посредством следующих правил для допустимых соединений узлов:

а) Каскад. Узлы $f^1, \ldots, f^s$ в. пр. с. N_1 можно соединить с попарно различными входными узлами $g^1, \ldots, g^s$ соответственно из в. пр. с. N_2.

б) Соединение двух входных узлов в. пр. с. допустимо.

в) Цикл. Если к узлу f в. пр. с. примыкают лишь входные каналы задерживающих элементов, то с ним можно соединить любой другой узел из этой сети.

Если число первичных элементов каждого рода в сети N_1 не больше, чем в сети N_2, то говорят, что N_1 столь же просто, как и N_2. Устанавливаются предложения:

1. Всякая в. пр. с. является д. с. (обратное неверно).

2. Всякое преобразование функций, реализуемое д. сетью, реализуемо и в. пр. с.;

3. Существует д. с. N такая, что всякая в. пр. с., реализующая все преобразования, реализуемые N, является столь же простой, как N.

Указываются достаточные условия того, чтобы для данной д. с. N существовала столь же простая в. пр. с., которая реализует все преобразования, реализуемые сетью N. Б. А. Трахтенброт

4023. Цифровая вычислительная машина с устройством для вычерчивания кривых (A digital computer with facilities for plotting graphs), Machinery (London), 1954, **85**, № 2179, 395 (англ.)

Сообщение о вычислительной машине ИЛЛИАК (ILLIAC) Университета штата Иллинойс (США). Машина имеет 2 700 электронных ламп, запоминающее устройство на электростатических трубках содержит 1 240 ячеек, арифметическое устройство имеет 40 разрядов. Машина выполняет 10 000 сложений в 1 сек. Ввод данных осуществляется с помощью перфоленты со скоростью 60 см в 1 сек. Результаты вычислений либо печатаются на телетайпе, либо проектируются в виде кривой на экране электроннолучевой трубки, либо вычерчиваются. В течение 7 сек. вычерчивается 200 точек кривой. Кроме того, имеется вторая электроннолучевая трубка, с экрана которой автоматически фотографируется результат. Л. С. Лере

4024. Электронная цифровая вычислительная машина (Electronic digital computer...), Art and Ind., 1954, **56**, № 336, 202 (англ.)

К реф. 4024

Приводится фото машины ИЛЛИАК (см. фот.

4025. Электронная вычислительная машина в Австралии (Electronic «brain» in NSW), Electr. Week, 1954, **38**, № 5, 12 (англ.)

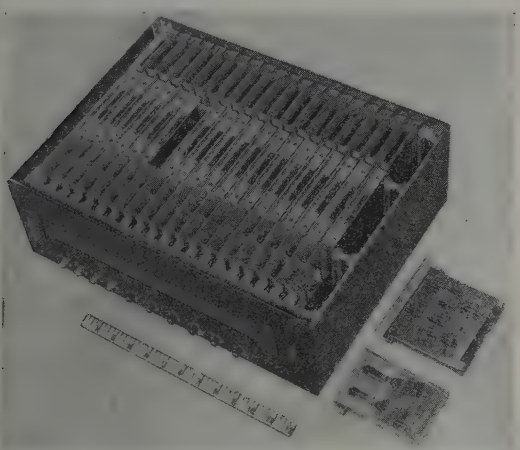
Сообщение о предполагаемой постройке вычислительной машины СИЛЛИАК (SILLIAC) в Сиднейск

ниверситете (РЖМат, 1955, 1992—1993). Указывает-я, что машина будет много быстрее и производитель-ее машины КСИРО-Марк I, работающей в Сиднее.
Л. С. Легезо

026. **Электронная вычислительная машина** (Electronic «brain»), Erda, 1954, **26**, № 1, 12—13 (англ.) См. РЖМат, 1955, 1992—1993, 4025.

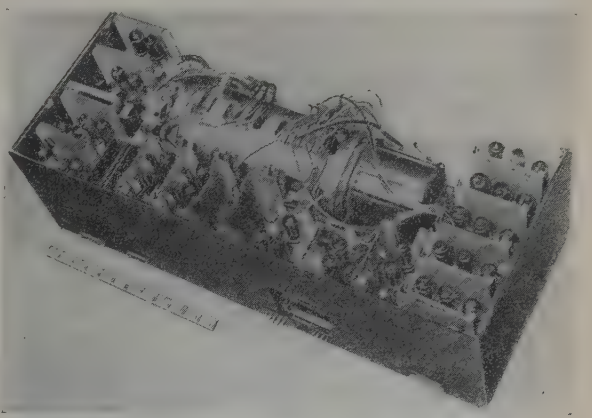
027. **Использование цифровых вычислительных машин в аэронавигации. Грабб** (The use of digital computers in air navigation. Grabbe E. M.), Navigation, 1954, **4**, № 2, 67—73 (англ.)

Отмечается, что цифровые вычислительные машины ля целей аэронавигации должны быть простыми по онструкции, компактными, легкими и подключаться оборудованию, вырабатывающему непрерывные анные. В США фирмой «Хьюз» (Hughes Research nd Development Laboratories, Culver City, Calif.) азработана универсальная цифровая вычислитель-ая машина, отвечающая этим требованиям и спе-иально приспособленная для установки на самолете. Машина выполняет все арифметические операции и, роме того, может контролировать знак числа, срав-ивать числа и производить различные переносы. Она представляет собой двоичную последовательную ашину, работающую на частоте 160 *кгц*. Числа пред-тавляются двоичным кодом. Количество разрядов 17. ложение занимает 240 *мксек*., умножение — около 000 *мксек*. Машина имеет запоминающее устройство а магнитном барабане диаметром 100 *мм*, вращаю-емся со скоростью 8000 об/мин. Плотность записи импульса на 1 *мм*. Общий объем запоминающего стройства 2500 чисел. Все входные и выходные дан-ые являются напряжениями, поэтому в качестве ходных и выходных устройств используются преобра-ователи цифровых данных в непрерывные, и наоборот. Всего таких устройств в машине 40.



К реф. 4027 Фиг. 1

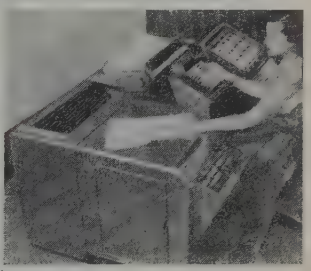
В машине применены сверхминиатюрные лампы и детали. Широко применяются германиевые диоды. Машина занимает объем около 0,15 $м^3$ и потребляет мощность 1,5 *квт*. Высокая степень надежности ма-шины достигается путем уменьшения количества ламп арифметический узел и блок управления имеют лишь 30 ламп), постановки ламп в легкий режим и хорошей стабилизации напряжений. Сообщается, что испыта-ния машины прошли успешно. Приводятся фото бло-ков арифметического узла с устройством управления (см. фото, фиг. 1) и запоминающего устройства (см. фото, фиг. 2), устройства ввода и вывода. См. также РЖМат, 1954, 4939—4941.
В. Д. Князев



К реф. 4027 Фиг. 2

4028. **Малогабаритная электронная вычислительная машина** («Small — size» electronic computer), Radio — Electronic Engng Sec., 1954, **23**, № 2, 32 (англ.)

Сообщение фирмы «Берроус» (Burroughs) о выпуске малогабаритной электронной вычислительной машины Е 101 (см. фото), предназначенной для научных учреждений и деловых контор. Машина имеет внутреннее запоминающее устройство на магнитном барабане, в котором хранятся необходимые для вычислений таблицы, логарифмы чисел и промежуточные результаты. Е 101 выполняет сложение двух 12-разрядных чисел за 2 *мсек*. Машина может также вычитать, умножать и делить.



К реф. 4028

Л. С. Легезо

4029. **Применение быстродействующих цифровых машин в проблемах колебаний молекул. Манн, Фано, Кейхилл, Симаноути** (The application of a high-speed digital computer to molecular vibration problems. Mann D. E., Fano L., Cahill W. F., Shimanouchi T.), J. Chem. Phys., 1954, **22**, № 4, 764 (англ.)

Рассматривается решение характеристических уравнений на машине СЕАК методом итераций. Итерационный процесс продолжается, пока не совпадут девять значащих цифр каждой компоненты двух последовательных приближений. Время, требуемое для нахождения всех собственных значений матрицы 12-го порядка, 1÷2 часа; матрицы 6-го порядка — около 15 мин. Один полный итерационный цикл занимает 0,3—0,5 сек. В случае близких (но не кратных) собственных значений число итераций резко возрастает.
В. К. Саульев

4030. **Проблемы становятся легкими. Спек** (Problems are easy! Speck David), Iowa Engng, 1953, **54**, № 3, 49—51 (англ.)

Общее описание конструкции машины СВАК (SWAC) и отдельных ее узлов (РЖМат, 1954, 3094; 1955, 1532). Сообщается, что за время эксплуатации машины на ней были решены такие задачи, как не-

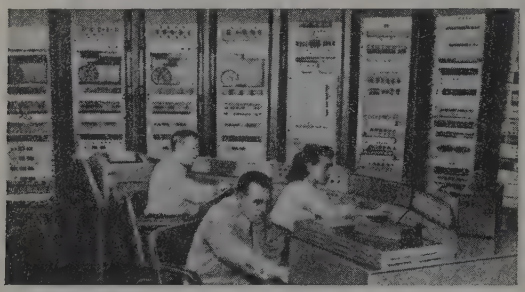
собственные интегралы, сложные дифференциальные уравнения, статистические задачи ядерной физики, анализ Фурье для диффракции рентгеновских лучей на кристалле и др. Решение задач занимало от нескольких минут до сотен часов рабочего времени машины. Л. С. Легезо

4031. Вычислительная машина СВАК Национального бюро стандартов США (Western automatic computer of the National Bureau of Standards), Engineer, 1954, **197**, № 5135, 939—941 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 3094; 1955, 1531.

4032. Многое нужно для того, чтобы сделать электронную вычислительную машину (It takes many minds to make an «electronic brain»), J. Amer. Soc. Naval Engrs, 1954, **66**, № 1, XV (англ.)

Рекламное объявление фирмы «Райтеон» (Raytheon Manufacturing Co.). Приводится фотография (см. фото)



К реф. 4032

автоматической цифровой вычислительной машины (Raytheon automatic digital computer), разработанной фирмой для Управления военно-морских исследований (Office of Naval Research) и используемой Испытательным центром управляемых снарядов военно-морской авиации (Naval Air Missile Test Centre) в Пойнт-Мейгу (Point Magu, Californias).

4033. Вычислительные машины и механический перевод. Бут (Calculating machines and mechanical translation. Booth Andrew D.), Discovery, 1954, **15**, № 7, 280—285 (англ.)

Рассмотрены различные варианты использования вычислительных машин для получения механического перевода с одного языка на другой. Использование кодирования всех букв алфавита в двоичной форме для составления словаря является неудобным, так как требует неосуществимо большой емкости запоминающего устройства. При представлении каждой буквы алфавита комбинацией из пяти двоичных знаков, словарь, состоящий из слов с максимальным числом букв в слове, равным 10, требует емкости запоминающего устройства 2^{50} (т. е. 10^{15}). В то же время максимальное число слов в языке составляет всего лишь 10^7. Существует несколько методов кодировки, наиболее экономичный из которых состоит в том, что код слова исходного языка помещается на одну ячейку запоминающего устройства вместе с кодом слова производного языка. Указывается, что для перевода текста по специальной тематике требуется словарь, содержащий всего лишь 1000 специальных терминов и 1000 общеупотребительных слов. Приводится 3 примера механического перевода на английский язык с немецкого, итальянского и русского языков. Приводится фотография внешнего вида универсальной электронной вычислительной машины Биркбекского колледжа (Birkbeck College) в Лондоне АПЕРК, (APERK) на которой в Англии ведется работа по механическому переводу. Сообщается, что для перевода текста, содержащего 1000 слов, в настоящее время требуется от 2 до 7 час. Для сокращения этого времени в первую очередь необходимо увеличить скорость работы входных устройств. Фирма «Белл» (США) и Биркбекский колледж (Англия) разрабатывают устройство для ввода данных, произносимых «вслух» оператором. Указывается, что для механического перевода желательно иметь специализированную машину, обладающую большим запоминающим устройством (до 8000 кодов по 250 разрядов) и выполняющую всего 2 операции: сдвиг и вычитание. А. Б. Залкинд

4034. Может ли быть механизирован процесс переводов? Бар-Хиллел (Can translation be mechanized? Bar-Hillel Yehoshua), Amer. Scientist, 1954, **42**, № 2, 248—260 (англ.)

Приводятся основные требования к обычному переводу и рассматривается возможность механического перевода с помощью вычислительной машины. Указывается, что перевод научных трудов значительно проще по сравнению с переводом литературных произведений за счет меньшего числа используемых слов. Процесс перевода может быть представлен установлением соответствия между некоторыми словами исходного языка и некоторыми словами или фразами языка, на который производится перевод. Основное требование к механическому переводу: наличие «механического словаря» в комбинации с «механическим распознавателем», который будет отыскивать из этого словаря слово, соответствующее переводимому слову. Отмечается, что для такого словаря слова, имеющие одинаковые корни, но разные окончания или приставки, являются разными словами. Рассматривается несколько принципов осуществления механического перевода.

Дословный перевод требует громадного запоминающего устройства. Например, немецкий словарь содержит 400 000 основных слов или 2 000 000 производных слов. Каждое немецкое слово может иметь в среднем 10 соответствующих ему английских слов. Таким образом запоминающее устройство должно хранить не менее 30 000 000 слов или иметь примерно до миллиарда разрядов. Учитывая требуемую большую скорость работы, такое устройство в настоящее время технически не выполнимо.

При использовании морфологического анализа требуются лишь основные слова. В русском языке число основных слов около 100 000. Указывается, что из 400 000 основных немецких слов всего 5000 слов используются сравнительно часто (в 90 случаях из 100). Рассматривается ряд примеров перевода с немецкого языка на английский.

Библиография, 10 названий. А. Б. Залкинд

4035. Могут ли машины переводить с одного языка на другой? (Can machines really translate from one language to another?), Canad. Mach. and Manufact. News, 1954, **65**, № 5, 123—124 (англ.)

Излагаются и иллюстрируются на примерах принципы, позволившие применить вычислительную машину ИБМ-701 для перевода с русского языка на английский (РЖМат, 1954, 5293, 5295). Указывается что машина сигнализирует о наличии опечаток, а также в случае бессвязности предлагаемой к переводу фразы. Сообщается о намерении фирмы ИБМ выпустить в течение трех-пяти лет специализированную машину для перевода. К. С.

4036. Электронный «мозг» открывает будущее для механических переводов (Electronic brain opens future for mechanical translators), Michigan Technic, 1954, **72**, № 5, 42 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 5293, 5295.

4037. Машина для переводов знает даже грамматику. Гатти (La macchina per tradurre sa perfino la

grammatica. Gatti Marco), Sci. e vita, 1954, 6, № 65, 359—362 (итал.)

4038. **Основы программирования для цифровых вычислительных машин. Томас** (Fundamentals of digital computer programming. Thomas Walker H.), Proc. I. R. E., 1953, **41**, № 10, 1245—1249 (англ.)

Описаны функции основных блоков цифровой вычислительной машины. Приведены примеры элементарных программ: арифметической, логической и циклической. Н. Н. Рикко

4039. **Решение задач на вычислительных машинах в Детройте. Раддант** (Computer: Solves Detroit's problems. Raddant R. D.), Iron Age, 1953, **172**, № 25, 78—79 (англ.)

Сообщение о пуске в эксплуатацию фирмой «Берроус» вычислительной машины ЮДЕК (UDEC), насчитывающей более 3000 электронных ламп (РЖМат, 1955, 2434). Машина ЮДЕК разрабатывалась в Филадельфийской лаборатории около четырех лет и была заказана 17 фирмами, в том числе фирмами «Дженерал Моторс» и «Форд Моторс». Стоимость машины 500 000 долл. Ввод данных в машину осуществляется с помощью перфоленты. Запоминающее устройство выполнено в виде магнитного барабана, представляющего собой алюминиевый цилиндр, покрытый черной окисью железа. Результаты вычислений либо печатаются телетайпом, либо записываются на бумажную ленту в десятичной системе. В. Б.

4040. **Электронные вычислительные машины** (Electronic computers), Instruments and Automat., 1954, **27**, № 2, 232 (англ.)

Сообщение фирмы «Джекобс» о цифровых электронных вычислительных машинах Дженкомп-С и Дженкомп-D (РЖМат, 1954, 4942).

Дополнительно сообщается, что машина Дженкомп-D имеет программное управление от магнитной ленты, перфокарт или от внутреннего запоминающего устройства. В последнем случае имеется возможность изменения программ. Габариты и вес машины таковы, что позволяют использовать ее на самолетах. Информация с перфокарт считывается с помощью электронной развертки. В. Б.

4041. **Новая цифровая вычислительная машина** (New digital computer role), Aviat. Week, 1954, **60**, № 14, 62 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 4942.

4042. **Дешевая цифровая вычислительная машина АЛЬВАК** (Low-cost digital computer for engineering use unveiled), Electr. Engng, 1954, **73**, № 5, 481—482 (англ.)

Сообщение фирмы «Лоджистикс Рисёрч» (Logistics Research Inc.) о выпуске новой цифровой последовательной машины АЛЬВАК (ALWAC) (РЖМат, 1954, 5291—5292). Дополнительно сообщается, что в качестве выходных устройств могут одновременно присоединяться 10 телетайпов, расположенных на большом расстоянии от машины. Кроме ввода с перфоленты, можно осуществлять ручной ввод с клавиатуры. К машине в качестве входного и выходного устройств могут быть присоединены преобразователи цифровых данных в непрерывные и наоборот. Оператор вручную может изменить инструкции в зависимости от необходимости. Л. С. Легезо

4043. **Цифровая вычислительная машина АЛЬВАК** (Digital computer), Instruments and Automat., 1954, **24**, № 2, 233—234 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 5291—5292; 1955, 4042.

4044. **Современное и будущее применение автоматических вычислительных машин в промышленности. Бландеи** (Automatic calculators... Present and future use in industry. Blunden W. R.), Manufact. and Manag., 1954, **9**, № 2, 46—49 (англ.)

Описываются в общих чертах типы автоматических вычислительных машин и проблемы, решаемые ими. Приводятся данные электронной цифровой машины КСИРО (РЖМат, 1954, 4201, 4202). О. С. Потураев

4045. **Вычислительная машина решает** (Computer holds solution), Steel, 1954, **134**, № 11, 122—123 (англ.)

Сообщение фирмы «Бендикс» о выпуске цифровой машины для решения дифференциальных уравнений (РЖМат, 1955, 2918), работающей по десятичной системе. Каждый интегратор может быть закодирован для выполнения сложения, умножения, деления, сравнения, ограничения действий с нулем. Ввод данных производится либо с перфоленты, либо вручную с клавишного аппарата. Результаты вычислений представляются либо в графической, либо в цифровой форме. Вывод на перфоленту производится без остановки вычислений. Л. А. Любович

4046. **Это вовсе не мозги. Эмерсон** (Look, no brains at all. Emerson Everett A.), Western Aviat., 1953, **33**, № 10, 24, 64 (англ.)

Сообщается о разработке малой цифровой машины общего назначения CRC 102-A (РЖМат, 1954, 2382, 4205). Приводятся общие принципы работы цифровых машин. Автор считает, что называть вычислительные машины «электронным мозгом» неправильно. Л. А. Любович

4047. **Быстродействующие цифровые вычислительные машины. Суэйн** (High-speed digital computers. Swain Francis E.), Engrs' Bull., 1954, **38**, № 12, 7, 19 (англ.)

Популярно излагается история возникновения, области применения и преимущества современных быстродействующих вычислительных машин. В качестве первых современных автоматических цифровых вычислительных машин указывается Марк 1 и БЕЛЛ V. Д. А. Абдуллаев

4048. **Моделирующее устройство ТРИДАК** (Three-dimensional analogue computer), Engineering, 1954, **178**, № 4632, 596—597 (англ.)

Описывается моделирующее устройство ТРИДАК (TRIDAC), предназначаемое для изучения проблем высокоскоростного полета самолетов, снарядов и управляемых объектов. ТРИДАК спроектирован и построен фирмой «Ройал Эйркрафт» (Royal Aircraft Establishment). Устройство занимает 600 $м^2$ и имеет 8000 ламп.

Суммирование и интегрирование величин производятся с помощью усилителей постоянного тока, имеющих коэффициент усиления порядка 60 000 и охваченных глубокой отрицательной обратной связью. «Дрейф нуля» выходного напряжения этих усилителей уменьшен до нескольких милливольт за счет дополнительных усилителей с механическими или магнитными преобразователями. Усилители имеют размеры $30 \times 20 \times 10$ *см*. Всего имеется 600 усилителей постоянного тока, причем 350 усилителей с механическим преобразованием и 250 — с магнитным. Усилители и другие электронные узлы для выполнения операций умножения, деления и синтеза различных кривых коммутируются шнурами. Для операций умножения и нелинейного преобразования в машине предусмотрены также 9 электрогидравлических следящих систем с электродвигателем мощностью 25 *квт* в каждой системе, приводящих в движение ползунки 224 потенциометров (линейных, синусных и косинусных).

Погрешность выполнения отдельных операций меньше 0,1%; при этом погрешность общего результата для большинства практических задач лежит в пределах 1%.

Имеется указание, что регистрация выходных величин: пути самолета, скорости, положения управляемого снаряда и т. д.— производится вычерчивателями кривых и специальными устройствами. Максимальное потребление энергии доходит до 650 *квт*. Разработка электрической модели ТРИДАК была начата в 1950 г. и производилась фирмой «Ройал Эйркрафт», которая финансировалась Министерством снабжения Великобритании. Стоимость машины 750 000 фунтов стерлингов.

Имеется указание на то, что близкой к машине ТРИДАК является моделирующее устройство АГВАК (AGWAC — Australian Guided Weapons Analogue Computer), разработанное фирмой «Эллиотт» и установленное в Австралии для исследования задач, связанных с полетом самолетов и снарядов, действующих против движущихся целей, и работающее как в истинном масштабе времени, так и в масштабе 10 : 1.

И. М. Витенберг

4049. Моделирующее устройство ТРИДАК (Three-dimensional analogue computer), Engineer, 1954, **198**, № 5151, 532—533 (англ.)

Приводятся основные технические характеристики крупнейшего в Англии и одного из самых крупных в мире моделирующего устройства ТРИДАК для изучения задач аэродинамики (см. реф. 4048). Приводятся дополнительные сведения о системе электропитания устройства. Приводятся примеры использования электрической модели ТРИДАК при исследовании полета самолета, полета планирующей бомбы и т. д.

Имеется краткое указание, что установка постоянных коэффициентов производится с помощью 2000 потенциометров, а образование нелинейных зависимостей — путем использования диодных схем.

И. М. Витенберг

4050. Моделирующее устройство ТРИДАК фирмы «Ройал Эйркрафт» (Three-dimensional analogue computer installed at the Royal Aircraft Establishment), Electr. J., 1954, **153**, № 16, 1214 (англ.)

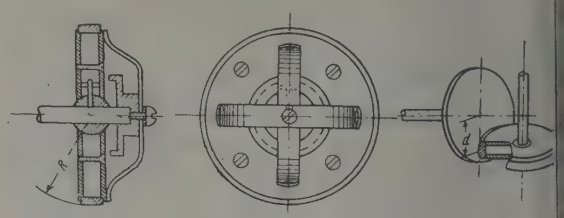
См. реф. 4048, 4049.

4051. Машина Нордсика для решения дифференциальных уравнений. Нордсик (The Nordsieck computer. Nordsieck Arnold), Proc. Western Computer Conf. (Febr. 1953), New York, 227—231 (англ.)

Приводится описание машины для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, основным элементом которой является новый тип механического интегратора, разработанный автором.

Разработанный автором механический интегратор способен нести определенную нагрузку без проскальзывания — в этом его основное достоинство. Связь между отдельными счетно-решающими элементами (интеграторами, множительными и суммирующими устройствами и т. д.) осуществляется электрически, при помощи обычной сельсинной передачи. Коммутация отдельных устройств выполняется посредством наборной панели. Нагрузочные моменты в новой машине весьма малы, порядка 70 *гр. см.*, а мощность всего механического привода порядка 0,01 *л. с.* Машина из шести интеграторов имеет габариты стола, вес около 500 фунтов и потребляет 500 *вт* от источника переменного тока 110 *в*, 60 периодов. Как известно, точность машины зависит от решаемой задачи, но в среднем погрешность данной модели составляет 0,001.

Автором сконструирован интегратор, состоящий из вращающегося диска, на который опирается специальное интегрирующее колесо. Последнее выполнено так, что оно всегда совершает относительно диска чистое качение. Колесо сидит непосредственно на оси сельсина так, что никаких подшипников, кроме тех, которые уже имеются в сельсине, не требуется. На фиг. приведена схема интегрирующего колеса (*a*) и (и расположение колеса относительно диска (*c*). Интегр рующее колесо связано с валом шаровой парой, а об



К реф. 4051

колеса очерчен по сфере радиуса R (см. фиг., *a*); цен сферы совпадает с центром шаровой пары. На ва имеется штырь, упирающийся в штырьки на коле так, что колесо может свободно вращаться относитель вала вокруг любой оси, перпендикулярной валу (в пр делах, допускаемых ограничителями), однако щ вращении колеса вокруг оси, совпадающей с вало колесо и вал благодаря штырю образуют одно цел (см. фиг., *a*, *b*). По периферии колеса расположено в сколько плоских пружин (см. фиг., *b*), стремящих выравнять колесо, установить его перпендикулярн валу. Однако натяжение пружин недостаточно, чтоб вызвать скольжение колеса по диску.

Интегрируемая функция представляется в виде ра стояния d от точки контакта до оси вращения дис (см., фиг. *c*). При изменении расстояния d и неподвижно диске, колесо будет катиться по диску, наклоняяс пока не упрется в ограничитель, после чего возникн скольжение. В действительности изменение d и вр щение диска происходят одновременно, при эт изменение d за четверть оборота вала колеса мало сравнению с радиусом R. Поэтому наклон колес вызванный изменением d, непрерывно выравнивает в процессе его вращения под действием выравнива щих пружин. В процессе работы колесо наклоняет на едва видимую величину и почти никогда не дохо до ограничителя.

Описываемая машина содержит шесть интеграторо шесть множительных редукторов (для умножен на постоянные коэффициенты) с передаточными отн шениями 0,1, 0,2, ..., 0,9, устанавливаемыми вручну четыре сумматора, осуществленных в виде ди ференциальных сельсинов, два функциональных устройс ва для ввода функций, заданных графически, либо дл вычерчивания решения в виде графиков, и два счетчи оборотов для фиксации числовых значений переменны Такие машины были построены и работали в Илл нойском университете, в Индианском университет (Purdue University), в радиационной лаборат рии Калифорнийского университета в Берк (США).

М. Л. Быховски

4052. Машина для решения дифференциальны уравнений (Differential analyser the N. P. L.' s ne analogue computer for solving differential equations Engineering, 1954, **178**, № 4634, 659—660 (англ

В Национальной физической лаборатории в Те дингтоне (Англия) пущена электромеханическая ма шина для решения дифференциальных уравнени Точность решения обеспечивается до трех знако Одновременно могут решаться три различные задач при использовании отдельных секций машины. Набо задачи производится на центральной коммутационно панели телефонного типа. В машине имеется 168 отдел ных сервомоторов, каждый из которых имеет сво собственный усилитель и 1000 ламп. Соединения вы

олнены с помощью многожильного кабеля общей
линой в 5500 *м*, имеющего свыше 1700 разъемов.
меется 20 интеграторов, 6 одинарных и 4 двойных
лоскостных функциональных устройства. Двойные
ункциональные устройства специально предназна-
аются для решения дифференциальных уравнений
запаздывающим аргументом. Они позволяют гра-
ически записывать одновременно две функции, свя-
анные либо с одной абсциссой, либо с различ-
ыми абсциссами. И. С. Корнеев

053. Полезный способ подготовки задач для моделирующих устройств. Максфилд (A useful technique in programming for analog computers. Maxfield J. E.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1954, 8, № 48, 233—234 (англ.)

Отмечается, что заменой независимой переменной $= e^t$ обыкновенное дифференциальное уравнение огда можно свести к такому уравнению, решение оторого на моделирующем устройстве может быть ыполнено без применения специальных генераторов ункции (функциональных преобразователей). Не-бходимые для такой замены экспоненты легко полу-ить на интеграторах. Автор замечает, что могут ыть применены и другие замены как независимой, аж и искомой переменной. Т. И. Маруашвили

054. Выбор масштабов при расчетах на моделирующих устройствах. Ресуик (Scale factors for analog computers. Reswick James B.), Prod. Engng, 1954, **25**, № 3, 197—201 (англ.)

Статья посвящена вопросам расчета масштабов при одготовке систем обыкновенных дифференциальных равнений для электрического моделирования и но-ит сравнительно общий характер. Указывается, что асштабы следует выбирать так, чтобы а) электриче-кие напряжения в моделирующем устройстве не вы-одили за максимально возможные для электрической одели величины; б) электрические напряжения были ущественно больше напряжений «помех».

Приводится пример расчета масштабов для системы равнений второго порядка. И. М. Витенберг

055. Вычислительный центр вычислительных машин непрерывного действия (Analog computation center available on rental basis), Electr. Engng, 1954, **73**, № 8, 785 (англ.)

Сообщение фирмы «Электроник Ассошиэйтс» (Electronic Associates, Inc.) об организации первого вы-ислительного центра, оборудованного моделирующи-и устройствами. Вычислительный центр был открыт июле 1954 г. П. В. Тихонов

056. Западная конференция по вычислительным машинам 11—12 февраля 1954 г. (Western computer conference, feb. 11—12), Tele — Tech, 1954, **13**, № 2, 149 (англ.)

Приводится список докладов, представленных кон-еренции.

057. Кто чем занят в области вычислительных машин и автоматики в Уэйнском университете, Детройт; дополнительный список, по состоянию на 4 марта 1954 г. (Who's who in computers and automation. Wayne University, Detroit. Supplement, information as of March 4, 1954), Computers and Automat., 1954, **3**, № 5, 13, 28 (англ.)

Список (20 человек) сотрудников Вычислительной лаборатории Уэйнского университета (Computation Laboratory at Wayne University, Detroit, Mich), работающих в области вычислительных машин и втоматики. Указывается область интересов.

058. Список организаций, принимающих заказы на выполнение вычислительных работ; по состоянию на 10 января 1954 г. (Roster of automatic computing services. Information as of January 10, 1954), Computers and Automat., 1954, **3**, № 2, 11 (англ.)

Список организаций, принимающих заказы на выполнение вычислительных работ; указывается название организации, ее адрес, имеющееся оборудование. В список включено 28 организаций из США, 2 из Англии, 1 из Швеции, 1 из Канады.

4059. Список организаций, принимающих заказы на выполнение вычислительных работ; по состоянию на 3 августа 1954 г. (Roster of automatic computing services. Information as of August 3, 1954), Computers and Automat., 1954, **3**, № 7, 23 (англ.)

В список включено 32 организации из США, 2 из Англии, 1 из Швеции, 1 из Канады.

4060. Список организаций, принимающих заказы на выполнение вычислительных работ; сводный список, по состоянию на 3 декабря 1954 г. (Roster of automatic computing services. Cumulative; information as of December 3, 1954), Computers and Automat., 1955, **4**, № 1, 20, 22 (англ.)

В список включено 36 организаций из США, 2 из Англии, 1 из Швеции, 1 из Канады.

4061. Список журналов, публикующих материалы по вычислительным машинам и автоматике; сводный список, по состоянию на 3 августа 1954 г. (Roster of magazines related to computers and automation. Cumulative, information as of August 3, 1954), Computers and Automat., 1954, **3**, № 7, 17, 25 (англ.)

Публикуется список журналов, помещающих материалы по вычислительным машинам и автоматике. Приводятся следующие данные: название журнала, периодичность, издательство и его адрес, профиль журнала, круг читателей и подписная цена, тираж, наличие реклам.

В список включено 13 журналов, издающихся в США.

4062. Вычислительная машина РАЙДАК и ее внешнее запоминающее устройство. Релер (The Raydac system and its external memory. Rehler Kenneth M.), Rev. of input and output equipment used in computing systems. Joint AIEE—IRE—ACM Computer Conference, 1952, New York, 1953, 63—70 (англ.)

Приводятся краткие сведения относительно устройства, некоторых параметров и системы контроля вычислительной машины РАЙДАК фирмы «Райтеон». Внутреннее запоминающее устройство машины построено на ртутных линиях задержки и имеет емкость в 1024 36-разрядных числа. Описано внешнее запоминающее устройство на магнитной ленте, состоящее из 4 блоков емкостью по 100 000 чисел и блока поиска нужной группы чисел. Данные записываются на шести дорожках магнитной ленты (седьмая используется для синхронизации) группами по 32 числа. Номера групп печатаются на обратной стороне ленты, имеют строго фиксированное положение по отношению к ленте и определяются оптическим способом. Описывается система промежуточного преобразования для обмена данными между внутренним и внешним запоминающими устройствами. Скорость передачи данных с магнитной ленты 500 чисел в 1 сек.

Блок поиска нужной группы чисел определяет направление движения ленты и положение группы чисел на ленте без перемотки. Правильность передачи числа проверяется путем сравнения контрольной группы числа, представляющей сумму восьмеричных цифр этого числа плюс единица, запоминаемой и передаваемой вместе с числом (четыре последних разряда). Проверка работы внешнего запоминающего устройства производится с помощью встроенных блоков контроля, осуществляющих автоматические циклы «чтения», «записи» и «чтения — записи». Предполагается осуществить дублирование магнитной ленты, что позволит использовать одну ленту для печатания промежуточных результатов. В. И. Смирнов

4063. Система ввода и вывода машины РАЙДАК. Грей (Raydac input-output system. Gray Walter H.), Rev. of input and output equipment used in computing systems. Joint AIEE-IRE-ACM Computer Conference, 1952, New York, 1953, 70—76 (англ.)

Для подготовки и ввода данных в машине РАЙДАК используется два телетайпа с перфораторами и устройство преобразования для записи данных с перфоленты на магнитную ленту. Пробивка лент ведется на двух телетайпах с последующей сверкой. Проверенная перфолента вводится в устройство считывания для перевода данных на магнитную ленту. Последовательность действий при этом определяется шаговым искателем. Скорость протяжки магнитной ленты составляет около 4 *см/мин*. Устройство ввода показало достаточную надежность.

Результаты вычислений записываются в двоично-десятичной системе на магнитную ленту. Для печати результатов используется телетайп, связанный с устройством на магнитной ленте при помощи вспомогательного регистра, хранящего одно число. Предусмотрен контроль правильности каждого напечатанного знака путем сравнения положения дешифраторных линеек телетайпа со знаком на регистре. Максимальное время печатания числа равно примерно 3 сек. Как при вводе, так и при выводе данных в каналах синхронизации употребляются фотоэлементы.

Е. И. Мамонов

4064. Устройства ввода и вывода данных машины СЕАК. Гринуолд (SEAC input- output system. Greenwald S.), Rev. of input and output equipment used in computing systems. Joint AIEE-IRE-ACM Computer Conference, 1952, New York, 1953, 31—36 (англ.)

Быстродействующая машина СЕАК (РЖМат, 1954, 3486) работает в Национальном бюро стандартов в Вашингтоне с мая 1950 г. Ввод и вывод данных в СЕАК осуществляется либо последовательно, число за числом, либо группами по 8 чисел, что удобнее при работе с запоминающим устройством на ртутных трубках. В настоящее время для ввода и вывода данных в машине используются 4 устройства на магнитной ленте, 2 устройства на магнитной проволоке и комплект телетайпного оборудования. Особое внимание при конструировании устройств ввода и вывода уделялось не столько вопросам универсальности и гибкости блоков, сколько вопросам повышения коэффициента использования машины, простоты, низкой стоимости и надежности блоков.

Блоки устройств на магнитной ленте обладают следующими характерными чертами: лента движется со скоростью 1,5 *м/сек*, для прямого и обратного хода имеются индивидуальные двигатели. Двигатели управляются соленоидами со скоростью срабатывания 5 мсек. Каждый блок имеет три головки: стирающую, записывающую и считывающую. Запись ведется с частотой повторения 6 *кгц* импульсами длительностью 12 *μсек*. Считываемые импульсы усиливаются двухкаскадным усилителем до стандартной величины 2 *в*. Стирание осуществляется подачей на головку напряжения 200—250 *в*, частотой 100 *кгц*. Управление считыванием и записью ведется с машины, стирающая же головка включается независимо, вручную. После прохождения под магнитными головками лента не сматывается на бобину, а падает свободно в плоскую стеклянную кассету. Во избежание накопления больших электростатических зарядов на ленте от трения, она снабжена с обратной стороны тонким алюминиевым покрытием.

Вводные и выводные устройства на магнитной проволоке представляют собой обычные, промышленного образца, диктофоны, в которых скорость протяжки проволоки повышена до 2,4 *м/сек*. Один такой диктофон служит для ввода, другой — для вывода данных. Вводной диктофон обеспечивает полное заполнение ртутного запоминающего устройства за 12 сек., включая необходимые коммутационные операции. Комплект телетайпного оборудования состоит из телетайпа, трансмиттера, перфоратора и коммутатора. Оборудование работает на пятипозиционной перфоленте. Для цифр отведены 4 позиции (шестнадцатиричная система счисления). В настоящее время телетайпное оборудование в основном применяется для ручного ввода и вывода данных при проверке машины или программ. Трансмиттер работает со скоростью примерно 24 двоичных знака в 1 сек., т. е. для заполнения запоминающего устройства на ртутных трубках требуется 1024 сек., в то время как через устройство с магнитной проволокой заполнение происходит за 12—13 сек., т. е. в 85 раз быстрее.

Селектор, управляющий включением того или иного устройства ввода-вывода, собран на 10 восьмиполюсных реле. Селектор имеет панель с восемью переключателями на 11 положений каждый. С их помощью можно включить в работу 10 вводных и выводных устройств (на машине СЕАК в настоящее время таких устройств только 7). Каждое устройство имеет свой код в шестнадцатиричной системе. Предусмотрена возможность одновременной параллельной работы нескольких устройств.

Специальный сдвигающий регистр служит для промежуточного хранения кодов при передаче их от устройств ввода и вывода в быстродействующие запоминающие устройства и обратно, а также для обращения кодов (перестановки старших разрядов на места младших, а младших — на места старших, для чего имеется специальная схема). Регистр состоит из 48 триггерных ячеек и может осуществлять сдвиг кодов только вправо.

Ю. И. Визун

4065. Устройства ввода и вывода, используемые в вычислительной машине СЕАК. Пайк (Input-output devices used with SEAC. Pike James L.), Rev. of input and output equipment used in computing systems. Joint AIEE-IRE-ACM Computer Conference, 1952, New York, 1953, 36—38 (англ.)

Дается краткое описание запоминающих устройств на перфоленте, на магнитной проволоке и на магнитной ленте машины СЕАК (см. также реф. 4064).

Для запоминающего устройства с магнитной проволокой применен серийный диктофон. Длина проволоки на катушке 540 *м*; материал — нержавеющая сталь. Основной недостаток — обрывы проволоки.

Запоминающее устройство на магнитной ленте служит для увеличения емкости оперативной памяти. Используется 4 блока ленты с одноканальной биполярной записью и стиранием переменным током. Ширина ленты около 6 *мм*, длина до 1080 *м*. При намотке на катушку не удалось использовать ленту длиннее 120 *м*. Лента способна сильно электризоваться при протяжке, что приводит к ее повреждениям. Другими недостатками является появление трещин на ленте и перекручивание, вызванное большой длиной ленты.

Приводятся фото устройств с лентой и проволокой.

Г. А. Хавкин

4066. Опыт работы с вычислительной машиной СЕАК. Эйнсуэрт (Operational experience with SEAC. Ainsworth Ernest F.), Rev. of input and output equipment used in computing systems. Joint AIEE-IRE-ACM Computer Conference, 1952, New York, 1953, 44—47 (англ.)

Описываются входные и выходные устройства машины СЕАК (SEAC) на магнитной проволоке и на ленте.

Передача данных с проволоки происходит более

ем в 100 раз быстрее, чем с ленты телетайпа. На одной атушке с проволокой может быть записано около 4000 чисел. Недостатком является большое время апуска и останова (более 1 сек.).

Описан способ отыскания нужной программы, записанной на проволоку, при котором на нее наносятся ужные замечания, воспроизводимые затем громковорителем. Дается описание входного и выходного стройства на магнитной ленте. Скорость движения енты 1,5 *м/сек*, плотность записи 4,5 импульса на *мм*. Механизмы и лента рассчитаны на скорость *м/сек*. На рулоне с 200 *м* ленты размещается 8000 кодов, а при уменьшении расстояний между блоками одов — до 12000. Для проверки правильности ввода меется специальная программа, суммирующая определенное количество введенных кодов и затем проверяющая ее правильность (либо вручную — печатанием езультата, либо автоматически — сравнением с конрольной суммой, также нанесенной на ленту). Приеден расчет времени для конкретной задачи.

В. П. Разроев

4067. **Вспомогательное устройство ввода-вывода вычислительной машины СЕАК. Хоэтер** (Auxiliary equipment to SEAC input-output. Haueter Ruth C.), Rev. of input and output equipment used in computing systems. Joint AIEE-IRE-ACM Computer Conference, 1952, New York, 1953, 39—44 (англ.)

Описано вспомогательное устройство для переноса анных с перфоленты на магнитную проволоку и для ечати результатов с проволоки, работающее независимо от машины. Для представления чисел используется двоично-шестнадцатиричная система. Механическая часть состоит из телетайпного оборудования, модифицированного под код СЕАК. Электронные схемы построены на новых элементах СЕАК с применением кристаллических вентилей, импульсных трансформаторов, линий задержки и регенеративной связи. Даны блок-схемы устройства и логические схемы основных электронных узлов. Считываемые с магнитной проволоки данные печатаются на бумажную перфоленту без останова проволоки. Скорость движения проволоки в этом случае 25 *мм/сек*. Выходной сигнал имеет порядок 200 *μs*.

Устройство записи проработало 1,5 года, а считывания — 1 год по 16 час. ежедневно. Г. А. Хавкин

4068. **Преобразователь данных с перфокарт на магнитную ленту. Блюменталь, Лопес** (Punched-card to magnetic-tape converter. Blumenthal E., Lopez F.), Rev. of input and output equipment used computing systems. Joint AIEE-IRE-ACM Computer Conference, 1952, New York, 1953, 8—11 (англ.)

В машине УНИВАК данные с перфокарт записываются на магнитную ленту с помощью специального преобразовательного устройства.

Преобразователь обрабатывает 80-колонные перфокарты, пробитые обычным способом. Содержимое ленты разбито на блоки по 720 десятичных разрядов в каждом, каждый из блоков — на 6 субблоков. 80 разрядов субблока заполняются с карты, 40 используются для вспомогательных целей. Длина субблока на ленте 30 *мм*, пропуск между блоками 60 *мм*.

Подача карт производится со средней скоростью около 350 карт в 1 мин. на барабан протяжки, посылающий карту на блок из 12 фотоэлементов. Барабан состоит из узких колец, располагающихся при считывании между рядами отверстий карт и не закрывающих прохождения света на фотоэлементы. С целью уменьшения колебаний уровня выходного сигнала с фотоэлементов предусматривалась стабилизация температуры блоков и определенные допуски на пробивку отверстий в карте. Сигналы с фотоэлементов при считывании с колонки перфокарты поступают в устройство, преобразующее знак в восьмиразрядный двоичный код (6 разрядов на десятичную цифру с контрольной группой и два вспомогательных), записываемый на ленту. При работе подающего механизма лента движется непрерывно со скоростью около 0,25 *м/сек*. Контроль правильности заключается в проверке выходного сигнала пробивок посредством цепей, срабатывающих от буквенно-цифрового переключателя. После записи данных карта выбрасывается в приемный карман. Е. И. Мамонов

4069. **Вводные устройства. Вильсон, Роггенстейн** (Input devices. Wilson L. D., Roggenstein E.), Rev. of input and output equipment used in computing systems. Joint AIEE-IRE-ACM Computer Conference, 1952, New York, 1953, 53—58 (англ.)

Описывается устройство «Юнитайпер» (Unityper) для прямой записи данных на магнитную ленту для вычислительной машины УНИВАК (UNIVAC). Для ввода данных с ленты в машину используется устройство «Юнисерво» (Uniservo) (см. реф. 4070).

«Юнитайпер» преобразует знаки с клавиатуры в код машины УНИВАК и записывает их с постоянной плотностью на магнитную ленту. Движение ленты равными шагами при записи каждого знака позволяет возвращаться к неправильно записанным знакам и исправлять их.

Цепи контроля и автоматического управления обеспечивают правильную запись каждого знака и группировку их в стандартные группы. Управление осуществляется с помощью кодов, записанных на замкнутой перфорированной ленте, движущейся синхронно с магнитной лентой, считываемых фотоэлектрическим способом. В зависимости от характера задачи может быть выбрана одна из трех цепей управления или задан переход от одной системы к другой.

Описывается устройство шифратора и схема управления 96-полюсным индукционным мотором, осуществляющим шаговое движение. Достижение лентой необходимой скорости для записи, сама запись и остановка занимают 50 мсек., обеспечивая запись 20 чисел в 1 сек. при автоматическом управлении. Принятая плотность записи составляет 8 импульсов на 1 *см*. Приведена фотография устройств. В. И. Смирнов

4070. **Устройство «Юнисерво» для чтения и записи на магнитной ленте. Уэлш, Луков** (The Uniservo — tape reader and recorder. Welsh H. F., Lukoff H.), Rev. of input and output equipment used in computing systems. Joint AIEE-IRE-ACM Computer Conference, 1952, New York, 1953, 47—53 (англ.)

Описывается устройство для чтения и записи на магнитной ленте, примененное в машине УНИВАК. В целях лучшего использования машины операции ввода и вывода осуществляются в два приема. Подготовка ленты производится на отдельном записывающем устройстве «Юнитайпер» (Unityper, см. реф. 4069). Воспроизведение и ввод данных с магнитной ленты в вычислительную машину осуществляется на большой скорости устройством «Юнисерво» (Uniservo), описываемом в данной статье. Данные из машины записываются на магнитную ленту также с помощью «Юнисерво», а печатание их производится на отдельном печатающем устройстве «Юнипринтер» (Uniprinter, см. реф. 4071). Установка состоит из десяти одинаковых устройств «Юнисерво», обеспечивая возможность параллельной работы этих устройств, большой объем запоминаемых данных, отдельное запоминание программы, данных, результатов и т. д.

Для записи используется металлическая лента толщиной 0,025 *мм*, шириной 12,7 *мм*. Запись ведется

параллельно 8 магнитными головками. Данные записываются блоками по 720 цифр, с длиною записи 140 *мм*, разделенными промежутками в 60 *мм*. Надежные результаты были получены при скорости ленты 0,25 *м/сек* и плотности записи от 10 до 60 импульсов на 1 *см*. Для уменьшения износа металлической ленты и сохранения постоянного зазора применяется буферная лента.

Участки ленты, дающие слишком малый сигнал или большой шум, предварительно определяются, отмечаются пробивкой отверстий и в дальнейшем не используются.

Описывается система транспортировки ленты, обеспечивающая пуск и остановку ленты за 10 мсек., что достигается путем применения схемы автоматического регулирования движения ленты, следящей за изменением петли ленты при пуске и остановке, а также установкой дополнительного двигателя непосредственно у магнитной головки, который преодолевает инерцию только нескольких сантиметров длины ленты. Приводятся упрощенные блок-схемы и рисунки, поясняющие принцип действия такой системы.

В. И. Смирнов

4071. **Устройства вывода. Мастерсон, Вильсон** (Output devices. Masterson E., Wilson L. D.), Rev. of input and output equipment used in computing systems. Joint AIEE-IRE-ACM Computer Conference, 1952, New York, 1953, 58—62 (англ.)

Система устройств вывода вычислительной машины УНИВАК включает в себя три различных устройства. Телетайп, установленный на пульте управления, применяется для печатания небольшого количества данных. Устройство «Юнипринтер» (Uniprinter), описываемое в данной статье, является основным печатающим устройством и осуществляет печатание с магнитной ленты со скоростью 10—12 знаков в 1 сек. Третьим видом является разрабатываемое быстродействующее печатающее устройство, которое будет применяться при большом количестве выходных данных.

«Юнипринтер» состоит из собственно печатающего устройства типа печатающей машинки с релейным дешифратором, работающей от электрических импульсов, и устройства для чтения ленты. Описывается блок-схема, отдельные блоки и работа схем контроля и управления. Номинальная плотность записи на ленте составляет 8 импульсов на 1 *см*.

Приводятся некоторые соображения относительно быстродействующего печатного устройства.

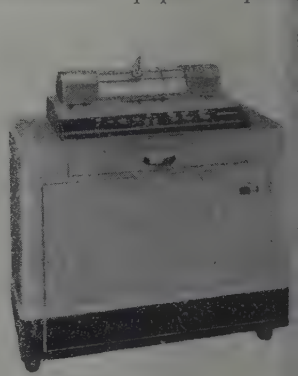
В. И. Смирнов

4072. **Техника записи цифровых данных. Тайлер** (Recording techniques for digital coded data. Tyler Arthur W.), Rev. of input and output equipment used in computing systems. Joint AIEE-IRE-ACM Computer Conference, 1952, New York, 1953, 3—7 (англ.)

Краткий обзор способов записи цифровых данных, используемых в устройствах ввода и вывода и промежуточных запоминающих устройствах, и изложение требований к характеристикам носителей записи и устройствам записи и воспроизведения. Рассмотрены достоинства и недостатки записи на магнитной ленте. Особое внимание уделено фотографическим способам записи, как обладающим большой разрешающей способностью. Кратко рассматриваются: свойства фотографических материалов, их теоретическая и практическая разрешающая способность, способы записи и воспроизведения при применении фотографических пленок, источники света с достаточной яркостью и модуляционной способностью для записи с высокими скоростями. Указывается, что при применении фотографических пластинок, обладающих лучшими механическими свойствами по сравнению с пленкой, можно вести запись с плотностью 1500 знаков на 1 *мм*². Диск диаметром 15 *см* имел емкость в 10 000 000 знаков, что эквивалентно 50 *м* 35-миллиметровой пленки или 250 *м* магнитной ленты с 10 дорожками. В. И. Смирнов

4073. **Автоматический аппарат для обвода и нанесения графиков кривых** (Automatic graph followers) Rev. Scient. Instrum., 1953, 24, № 5, 404—405 (англ.)

Сообщение фирмы «Лоджистикс Рисёрч» (Logistic Research Inc.) о выпуске автоматического аппарата (см. фото) для обвода и нанесения графиков кривых (Logrine Digital Graph Follower). Аппарат снабжен специальным электронным и фото-электрическим оборудованием и может быть использован в качестве входного или выходного устройства, а также функционального преобразователя для цифровых вычислительных машин, для вычерчивания графиков с таблиц, заданных на перфокартах или перфоленте. Поскольку входные или выходные данные представляются в виде приращений функций, прибор наиболее удобен для использования с цифровыми машинами для решения дифференциальных уравнений (МЕДДИДА-44А CRC-105). В машинах другого типа должна быть введена специальная подпрограмма для работы с прибором. Графики кривых наносятся на бумажные листы размером 300 × 450 *мм* или бумажную ленту шириной 300 *мм*. Импульс приращения выдается при изменении графически представленной функции на 0,25 *мм*. Аппарат может быть быстро переключен с записи на обвод графиков кривых и наоборот, путем замены записывающей и следящей головок. Все электронное оборудование аппарата размещено в блоке размером 750 × 750 × 380 *мм*.



К реф. 4073

Аппарат без больших усложнений может быть приспособлен для ввода в вычислительные машины некоторых функций, зависящих от двух переменных. При этом на листе бумаги должно быть нанесено семейство кривых (сечений) заданной функции по одному независимому переменному; второе независимое переменное служит параметром семейства. При изменении второго независимого переменного следящая фото-электрическая головка переходит через соответствующее количество кривых семейства на требуемую кривую; при этом на выходе аппарата выдаются дополнительные данные, соответствующие дополнительному смещению головки.

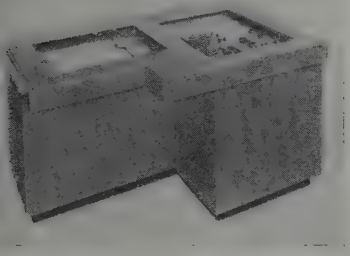
В сочетании с дополнительным оборудованием устройство может использоваться для вычерчивания кривых с перфокарт и перфолент, а также перфорировать карты или ленту по данным, получаемым кривой. Устройство может быть использовано для передачи экспериментальных кривых по каналам связи.

Е. А. Волк

4074. **Автоматический вычерчиватель кривых** (Automatic plotter), Instruments and Automat., 1954, 27, № 2, 234 (англ.)

Сообщение фирмы «Бенсон — Ленер» (Benson — Lehner Corp.) о выпуске нового электрического автоматического вычерчивателя кривых «Электроплоттер»

lectroplotter) (см. фото). Размер чертежа 28 × 38 *см*. Устройство может принимать данные из фровых вычислительных машин, машин на перфо-ртах или из клавишных ручных аппаратов. В последнем учае быстродействующий десятиклавишный аппарат вводит информацию со скоростью 35 точек в 1 мин. Поперечная скорость пера 40 *см/сек*, точность 0,1%. Прибор имеет независимую установку нуля, устройство для управления масштабом по обеим осям, устройство для установки скорости поперечного перемещения пера и снабжен вакуумным столом ля закрепления чертежа

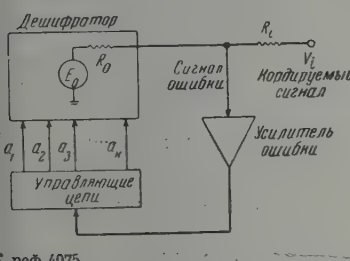


реф. 4075

Л. С. Легезо

075. Преобразование данных из непрерывной формы в дискретную методами обратной связи. Смит (Coding by feedback methods. Smith B. D.), Proc. I. R. E., 1953, 41, № 8, 1053—1058 (англ.)

Описывается устройство для преобразования данных з непрерывной формы в дискретную (для любой системы счисления), скелетная схема которого приводится (см. фото). Кодируемое напряжение подается а клемму Vi и, следовательно, через сопротивление R_i на вход усилителя ошибки, который воздействует на декодирующее устройство(устройство для преобразования данных из дискретной формы в непрерывную), включенное в цепь братной связи этого усилителя. Когда сигнал шибки будет равен нулю, число, представленное одом $a_1a_2 \ldots a_k$, будет дискретным выражением напряжения V_i.



реф 4075

Приводится схема нелинейного преобразования, озволяющего изменять динамический диапазон изеряемой величины. Указывается, что преобразование етодами обратной связи, не уступая другим методам реобразования по точности результата, в то же время меет преимущества: возможность работы при любой истеме счисления и получение чисел, являющихся елинейными функциями входного сигнала.

В. Д. Князев

076. Магнитный матричный коммутатор для вывода двоичной информации. Брин (Magnetic — matrix switch reads binary output. Brean John W.), Electronics, 1954, 27, № 5, 157—159 (англ.)

Кратко описан коммутатор, выполненный по перестной схеме на магнитных сердечниках с прямогольной петлей гистерезиса, предназначенный для оследовательного, поразрядного вывода двоичной нформации из обычного лампового счетчика на экран сциллографа.

Двоичные цифры «1» и «0» изображаются наличием или отсутствием напряжения с частотой 400 *гц* на выходной обмотке коммутатора. Для этого все сердечники возбуждаются током 400 *гц*, а информация вводится в коммутатор в виде насыщенного тока открытых ламп триггеров счетчика (наличие изображает «0», отсутствие изображает «1»). Кроме того, сердечники насыщены дополнительным управляющим током. При поочередном отклонении этого дополнительного тока от каждого сердечника на общей выходной обмотке в зависимости от состояния сердечника, определяемого соответствующим триггером счетчика, появляется или не появляется напряжение 400 *гц*.

Коммутатор вместе со счетчиком является частью оборудования для летных испытаний системы управления воздушной стрельбой. Расчетного и экспериментального материала статья не содержит.

О. В. Росницкий

4077. Вентили с насыщенными трансформаторами. Моффат (Saturable transformers as gates. Moffat Burnham), Electronics, 1954, 27, № 9, 174—176, 178 (англ.)

Быстродействующие схемы селекции могут быть построены из элементов, представляющих собой модификацию магнитного усилителя на 3-стержневом сердечнике из ферромагнетика, не имеющего прямоугольной петли гистерезиса.

Каждый элемент имеет 3 обмотки: входную, управляющую и выходную. Входная обмотка имеет 2 секции, расположенные на отдельных тороидальных сердечниках. Аналогично расположена выходная обмотка. Управляющая обмотка охватывает оба сердечника. При таком расположении обмоток входная и управляющая цепи оказываются взаимно развязанными без включения дополнительных элементов, например, диодов. Ток входной обмотки индуктирует значительное напряжение на выходе, если отсутствует ток в управляющей цепи. Насыщение сердечников током управляющей обмотки резко уменьшает выходное напряжение.

Эксперименты проводились с ячейками на ферритовых сердечниках из материала «феррокскуб 101» с коэффициентом прямоугольности (отношение остаточной индукции к индукции насыщения) 0,48. Из шести ячеек был составлен пирамидальный коммутатор, на выход которого поочередно поступают напряжения, соответствующие токам четырех входов. Импульсы входных токов имеют длительность 2,5 *мксек*, амплитуду 38 *ма* и частоту повторения 100 *кгц*. Коммутация производится двумя управляющими токами, имеющими вид меандров с периодами 160 *мксек* и 320 *мксек*, создающими в сердечниках поле напряженностью 3 эрс. При этом отношение сигнала к помехе равно 8. Затухание сигнала составляет примерно 1,9 *дб* на ступень пирамиды.

Отмечается, что при имеющихся материалах предельное число ступеней в коммутаторе равно 5. Отмечается также, что коммутаторы, составленные из предлагаемых ячеек, при малых скважностях должны работать лучше коммутаторов, построенных на сердечниках с прямоугольной петлей гистерезиса, вследствие меньших потерь на гистерезис.

В качестве примера применения таких коммутаторов приводится использование их для чтения и записи на магнитном барабане с помощью одного усилителя записи и одного усилителя чтения при последовательном способе работы запоминающего устройства.

О. В. Росницкий

4078. Конструирование феррорезонансного триггера. Рутисхаузер (Ferroresonant flip-flop design. Rutishauser Rudolph W.), Electronics, 1954, 27, № 5, 152—153 (англ.)

Приводятся некоторые сведения о работе феррорe-

зонансного триггера с общим входом и о работе кольцевых счетчиков, составленных из феррорезонансных ячеек. В качестве материала сердечников используется пермаллой толщиной 3 μ, что позволяет применять питающие напряжения с частотой от 1 до 2 *Мгц* и получать скорость работы триггера до 100 *кгц*. Триггеры нормально работают при нестабильности питающего напряжения 20% по амплитуде и 10% по частоте. Активная мощность, которая может быть получена с выхода триггера без нарушения его работы, составляет примерно 1/3 реактивной мощности триггера на холостом ходу. Отношение резонансного напряжения к нерезонансному достигает 16.

Кроме схемы триггера приведена схема кольцевого счетчика из пяти ячеек. Отмечается, что счетчик из 32 ячеек работает удовлетворительно, а 50 ячеек являются практически предельным количеством. Упоминается, что при конструировании триггеров используются графические методы. Исходными данными являются экспериментальные кривые зависимости эффективной индуктивности от питающего тока в обмотке сердечника. О. В. Росницкий

4079. **Твердые линии задержки используют расплавленный кварц** (Solid delay lines utilize fused quartz), Electronics, 1953, **26**, № 10, 360 (англ.)

4080. **Исследование надежности полупроводниковых триодов. Райдер, Ситнер** (Transistor reliability studies. Ryder R. M., Sittner W. R.), Proc. I. R. E., 1954, **42**, № 2, 414—419 (англ.)

Исследуются причины ухудшения качества полупроводниковых триодов. Рассматриваются как слоевые, так и точечные триоды. Изменение триодов классифицируется по трем группам: 1) постепенное изменение характеристик и особенно заметное изменение обратного тока в цепи коллектора (старение триода); 2) постепенное уменьшение сопротивления между эмиттером и коллектором; 3) резкое изменение коэффициента усиления по току, происходящее внезапно без видимой внешней причины (гибель триода).

Старение объясняется адсорбцией ионов поверхностью германия в области *n-p*-перехода; особенно сильно влияние водяных паров. Помещение триодов, залитых воском и покрытых пластмассой, в пары воды резко ускоряет старение. Повидимому, влага проникает вдоль проводников и диффундирует через пластмассу. Однако чувствительность перехода к влаге различна у разных триодов. Внезапную гибель триодов объясняют механическими деформациями, возникающими в области *n-p*-перехода за счет различного теплового расширения материалов, а также за счет разбухания изолятора при впитывании влаги. Уменьшение сопротивления между эмиттером и коллектором, эквивалентное появлению сеточного тока в лампе, объясняется появлением утечек по поверхности германия за счет адсорбции ею влаги и других причин.

Делается вывод, что в настоящее время единственным способом добиться длительной стабильной работы полупроводникового триода остается герметическая запайка триода после тщательной обработки его поверхности. В. И.

4081. **Двойной диод: полупроводниковый аналог тиратрона. Олдрич, Леск** (The double-base diode: a semiconductor thyratron analog. Aldrich R. W., Lesk I. A.), Trans. I. R. E., 1954, ED-1, № 1, 24—27 (англ.)

Кратко описан двойной германиевый диод, предназначенный для работы при токах до одного ампера в качестве переключателя или релаксационного генератора. Преимуществом такого диода перед тиратроном является работа при низких напряжениях, а перед термопереключателем — высокая скорость переключения и долговечность. Приводятся параметры диода и схемы генератора и переключателя на диоде.

4082. **Мостовая схема для испытания кристаллических триодов. Дорман** (A bridge transistor tester. Dorman David), Radio and Telev. News. Radio Electronic Engng Ed., 1954, **51**, № 2, 5—7, 34 (англ.)

Описание приставки, разработанной к мостовому прибору типа 561-D фирмы General Radio Co., который предназначен для измерения параметров электронных ламп (R_i, μ; S). Будучи снабжен описываемой приставкой этот прибор даст возможность определять основные параметры кристаллических триодов. Точность измерений, гарантируемая фирмой, 2%. А. Б. Залкинд

4083. **Осциллографическая съемка характеристик германиевых диодов. Франк** (Oscilografické snímání charakteristiky germaniových diod. Frank Helmar), Sdělovací techn., 1954, **2**, № 2, 40—41 (чеш.)

Подробно рассмотрены различные варианты осциллографической схемы, применяемой для исследования вольт-амперных характеристик германиевых диодов. Отдельно проанализированы варианты схемы, используемые для снятия прямой и обратной ветвей характеристики. Произведены оценки величин отдельных важнейших параметров схем. Приведено значительное количество ценных советов по практической организации контроля качества германиевых диодов осциллографическим способом. А. Р.

4084. **Германиевые триоды типа *n-p-n*, образованные вплавлением. Дженни** (A germanium N-P-N alloy junction transistor. Jenny Dietrich A.), Proc. I. R. E., 1953, **41**, № 12, 1728-1734 (англ.)

Триоды типа *n-p-n* отличаются от триодов типа *p-n-p* знаком активного носителя зарядов, а вследствие этого и знаками потенциалов смещения. Последнее может иметь значение при совместном использовании триодов обоих типов (Sziklai G. C., Proc. I. R. E., 1953, **41**, 717—724). Кроме того триоды этого типа должны иметь более высокий частотный предел коэффициента усиления по току, так как подвижность электронов более чем вдвое превышает подвижность дырок.

Триоды *n-p-n* изготавливаются путем вплавления сплава свинца с сурьмой в пластинку германия дырочной проводимости. Используется сплав с содержанием сурьмы несколько ниже 11,2%, которое соответствует эвтектической точке. Сплавы таких концентраций достаточно вязки для того, чтобы различие в коэффициентах термического расширения не вызывало механической и электрической нестабильности образованного *n-p*-перехода. Для получения формы перехода, возможно более приближающейся к плоской можно пользоваться либо созданием давления на вплавляемый сплав после его расплавления, либо быстрым повышением температуры и проведением вплавления при возможно более высокой температуре (ниже 700°). Использование электрических характеристик было проведено на экспериментальной партии в 100 образцов. Исследования показали, что более 50% образцов имеют коэффициент усиления по мощности 42 ± 2*дб* коэффициент усиления по току 0,985$\pm$0,01, а шумовой фактор при 1 *кгц* 9$\pm$5 *дб*. Коэффициенты усиления измерялись при потенциале коллектора в 10 *в* и токе эмиттера 2 *ма*, а шумовой фактор при $V_к = 1$*в* $I_э = 1$ *ма*. Триоды могут работать при промежуточной частоте (455 *кгц*), а отдельные образцы дают заметное усиление в широковещательном диапазоне (500 *кгц* — 1,5 *Мгц*). А. В. Ржанов

4085. **Полупроводниковые интерметаллические соединения** (Semiconducting intermetallic compounds) Tele-Tech, 1953, **12**, № 11, 86, 147 (англ.)

На основании исследований Национального бюро стандартов (проведенных в физической лаборатории твердого тела) приводятся некоторые данные относительно свойств полупроводников: антимонида индия (InSb), антимонида алюминия (AlSb) и др. интерметаллических соединений.

Отмечается, что высокая подвижность носителей зарядов, замеренная для антимонида индия (20 000 *см²/вольт сек*, т. е. почти в семь раз большая, чем для германия), позволит значительно увеличить рабочую частоту и уровень мощности полупроводниковых электронных приборов, если будут изготовлены образцы достаточно чистого материала. Указывается, что для антимонида алюминия получено значение энергии активации 1 электрон-вольт, т. е. несколько большее, чем для кремния; это весьма существенно для температурной характеристики полупроводника.

Приведенные данные свидетельствуют о необходимости дальнейших разработок интерметаллических соединений, в результате которых может быть найден обладающий ценными свойствами материал для изготовления электронных полупроводниковых приборов. Н. И. Бродович

4086. Элементы промышленной электроники. Болан (Éléments d'électronique industrielle. Bolant Roger), Mach.-outil franç., 1953, 18, № 81, 45, 47 (франц.)

Популярная статья о полупроводниковых триодах.

4087. Селеновый выпрямитель в цепях цифровых вычислительных машин. Бут, Холт (The selenium rectifier in digital computor circuits. Booth A. D., Holt A. D.), Electronic Engng, 1954, 26, № 318, 348—355 (англ.)

Приводятся некоторые результаты экспериментов с селеновыми малогабаритными выпрямительными дисками типа М.1 (диаметр диска 6,3 *мм*, толщина 1,6 *мм*).

В статическом режиме эти диски имеют прямое сопротивление 5÷10 *ком*, малую паразитную емкость, большое обратное сопротивление (100÷125 *Мом*) и в течение длительного времени выдерживают 50*в* обратного напряжения. Замечено увеличение обратного сопротивления приблизительно на 15% в первые рабочие часы.

Излагаются методы снятия динамических характеристик. Даны кривые зависимости прямого сопротивления, а также прямой и обратной емкости от приложенного напряжения. Постоянная времени таких дисков в прямом направлении равна 2 *мксек*, а в обратном 2 000 *мксек*, разброс параметров не превышает 20% и они могут с успехом использоваться на частотах до 30 *кгц*.

Рассматривается схема сдвигающего регистра, а также схемы совпадения и разделения импульсов, в которых электронные лампы могут быть заменены селеновыми дисками.

Рассматриваются диодные декодирующие сетки, их наиболее экономичное построение и даются примеры конструктивного выполнения диодных сеток, использующих селеновые диски типа М.1. А. И. Щуров

4088. Новый танталовый конденсатор — компаньон полупроводникового триода (New tantalum capacitor companion for transistor), Tele-Tech, 1953, 12, № 11, 20 (англ.)

См. РЖМат, 1955, 2033.

4089. Новые аппараты для математических операций. Дюбуа (Nuovi apparecchi per operazioni matematiche. Dubois F. R.), Ingegnere, 1954, 28, № 2, 152—160 (итал.)

См. РЖМат, 1953, 967, 968, 1480.

4090. Новое устройство, осуществляющее электромеханическое соединение между счетно-аналитическими машинами. Жанен (Nouveau dispositif de liaison électromécanique entre machines mécanographiques à cartes perforées. Janin R.), Rech. aéronaut., 1954, № 40, 51—52 (франц.)

Релейное устройство, состоящее из 38 реле, осуществляет связь между табулятором и вычислительным перфоратором. Устройство передает цифровую информацию из одной машины в другую. Указывается, что время, требующееся на умножение матриц, уменьшилось в 3 раза, а на вычисление характеристического уравнения — в 2 раза. Указывается на возможность использования данного устройства для соединения табулятора с цифровой вычислительной машиной. Н. Н. Поснов

4091. Цифровая счетно-записывающая машина (Digital read-out printer), Instruments, 1953, 26, № 11, 1654 (англ.)

Краткое сообщение о том, что фирмой «Клари Малтиплайер» (Clary Multiplier Corp.) выпущена новая многоклавишная счетно-записывающая машина, позволяющая подсчитывать и печатать на бумажной ленте цифровые данные, поступающие в машину в виде электрических импульсов. Машина выпускается в трех моделях: мод. 190 — без накопления и хранения цифровых данных, мод. 191 — для накопления данных и периодического печатания накопленных сумм, мод. 197 — для накопления положительных и отрицательных данных и периодического печатания алгебраического значения накопленных сумм. Две последние модели могут быть использованы как обычные счетнозаписывающие машины. Приводится фото машины. Н. Н. Парусникова

4092. Быстродействующая машина «Астра». Немецкий экспорт, 1953, № 1, 56

Кратко сообщается о выпускаемой в Германской Демократической Республике счетной сальдирующей машине с записью чисел на узкой ленте «Астра» мод. 110 и созданных на ее базе машинах с подвижной кареткой «Астра» мод. 111 и 112. Отличительными чертами типа «Астра» мод. 110 является десятиклавишная клавиатура с двумя дополнительными клавишами «00» и «000», внутренний сальдирующий счетчик емкостью 12 разрядов, высокая техническая скорость — 160 рабочих ходов в 1 мин., малый вес — 10,8 *кг*, а также возможность установки нового числа до окончания предыдущей счетной операции и снятие итогов без холостого хода и гашения находящегося в установочном механизме числа.

Машины мод. 111 и 112 снабжены широкой кареткой с бумагоопорным валиком длиной 32 *см*, перемещение которой при подсчете в колонку выключается. Машина мод. 112 имеет устройства для печатания номеров документов и изменения ширины граф в пределах 32—60 *мм*.

Приводятся фотографии машин «Астра» и каретки машины мод. 112. Н. Н. Парусникова

4093. Усовершенствованный арифмометр «Триумф» с полным обслуживанием одной рукой. Немецкий экспорт, 1953, № 4, 51—52

Сообщается об усовершенствованиях арифмометров «Триумф» мод. CN 1 и CRN 1, благодаря чему можно производить работу на машинах одной правой рукой. В новых моделях все рычаги управления располагаются справа, около оперативной рукоятки.

«Триумф» мод. CN 1 имеет рычажный 10-разрядный установочный механизм, снабженный индикатором набора. Счетчик результатов емкостью 13 разрядов и счетчик оборотов емкостью 8 разрядов располагаются на подвижной каретке. Оба счетчика имеют механизмы передачи десятков. Гашение показаний счетчиков производится в любом положении каретки при повороте

рычажков гашения на 90° (вместо 180° в старых моделях).

«Триумф» мод. CRN 1 отличается от вышерассмотренной модели возможностью переноса чисел из счетчика результатов в установочный механизм путем подключения установочного барабана к счетчику и гашения последнего.

Приводится фото обеих моделей арифмометра.

Н. Н. Парусникова

4094. Историческая справка о машине для нахождения корней. Рубинов (Historical note on root-finding machine. Rubinoff Morris), Math. Tables and Other Aids Comput., 1954, 8, № 46, 123 (англ.)

Указание на машину для решения уравнения степени n, которую предложил в 1880 г. Фриланд (Frank T. Freeland) и которая пропущена в обзоре машин для решения алгебраических уравнений, помещенном в этом же журнале (Frame J. S., Math. Tables and Other Aids Comput., 1945, 1, 337—353). Машина Фриланда содержит n рычагов, так связанных друг с другом, что перемещение первого из них на x вызывает перемещения последующих на последовательные степени x, а установка коэффициентов осуществляется посредством блоков с нитями.

В. М. Брадис

4095. Критерий счетной линейки. Рансом (Slide rule criterion. Ransom William R.), Math. Mag., 1953, 27, № 1, 41 (англ.)

Для функции $z = f(x, y)$ можно построить счетную линейку тогда и только тогда, когда существует функция $S(z)$, удовлетворяющая условию $S'(z) = X(x) + Y(y)$. Исключение функций $X(x)$ и $Y(y)$ приводит к уравнению

$$S''(z) / S'(z) = -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} : \left(\frac{\partial z}{\partial x}\ \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Необходимым условием существования функции $S(z)$ является выполнение равенства

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Приведены примеры функций, в которых это условие выполняется и построение счетной линейки возможно.

В. М. Брадис

4096. Вычислительное устройство для выбора навесок при микроанализе углерода и водорода. Томпсон (Calculator for selection of sample weights in microdetermination of carbon and hydrogen. Thompson Ruth C.), Analyt. Chem., 1953, 25, № 3, 535—536 (англ.)

Описана и изображена счетная линейка для вычисления оптимальных навесок при количественном микроанализе в случае, когда устанавливают содержание углерода и водорода.

В. М. Брадис

4097. Счетный диск для микроанализа. Шахат, Савелл (Circular slide rule for microanalysts. Schachat R. E., Savell Walter L.), Analyt. Chem., 1953, 25, № 11, 1779—1781 (англ.)

В развитие предложения Томпсона (см. реф. 4096) предлагается счетный диск, позволяющий находить оптимальные навески при количественном микроанализе в случае, когда устанавливают содержание углерода, водорода и азота. Кроме того, этот счетный диск позволяет выполнять арифметические операции умножения, деления и их комбинации. Дан подробный расчет шкал, приведено 5 чертежей.

В. М. Брадис

4098. Счетный диск (Disk calculator), Mach. Design, 1953, 25, № 12, 328, 330 (англ.)

Сообщение фирмы Servotrol Co. о выпуске нового прибора, основанного на номографическом принципе, подсчитывающего комбинированное сопротивление потенциометра и шунтового сопротивления, требуемого для преобразования линейной функции в нелинейную. Приведено фото.

Е. К. Нечаев

4099. Электронные числа и счёт. Рихтер (Elektronisches Zählen und Rechnen. Richter Heinz), Elektro-Technik, 1954, 36, № 51—52, 67—68 (нем.)

Дается понятие о цифровых и моделирующих устройствах. Отмечается простота схем, построенных на специальных десятичных счетных лампах (РЖМат, 1954, 3912, 3913), в сравнении с десятичными схемами, работающими на триггерах.

Г. Г. Меньшиков

4100. Кибернетические игры. Сарди (Giuochi cibernetici. Sardi Paolo), Civilta macchine, 1953, 1, № 5, 76—77 (итал.; резюме англ.)

Популярный очерк о машинах, играющих в различные игры (по материалам статьи Бёма, РЖМат, 1954, 2391). Эти машины автор делит на три класса: настоящие игрушки (белка, черепаха и т. д.), машины для решения комбинаторных задач (ханойская башня, китайские кольца и т. д.), машины, заменяющие игрока в играх для двоих (шахматы, шашки и т. д.). Рассказывается о машинах, построенных К. Шенноном для игр «ханойская башня», «китайские кольца», «Ним», «игра X» и «птичья клетка»,— а также о его электрической мыши (РЖМат, 1954, 2389). Указывается, что эта мышь может служить родоначальником целого ряда полезных машин, например, автоматической газонокосилки, управляющей своим движением и огибающей клумбы; машины для собирания теннисных мячей; машины для автоматического изготовления кексов с выбором рецепта из поваренной книги. Рассказывается также об игрушках других изобретателей («черепаха», см. РЖМат, 1954, 4950, 5881; «белка», «подъемный кран», «Джордж» и «электрический корабль»). Сообщается о применении вычислительных машин УНИВАК и МОНРОБОТ для прогноза президентских выборов в США в 1952 г.

Г. Н. Поваров

4101. Как была изобретена счетная машина (Wie die Rechenmaschine erfunden wurde), Neuheiten Erfind., 1953, 20, № 235, 241 (нем.)

Автор рассказывает об изобретении счетной машины французским математиком Б. Паскалем. По утверждению автора, Паскалю принадлежат принцип расположения цифр на окружностях колес и схема механической передачи единицы переноса в старший разряд, употребляющиеся в современных механических счетчиках. Машина Паскаля не могла войти в общее употребление, вследствие того, что построенная им машина стоила 100 ливров, а коммерсанты могли оплачивать работу вычислителей гораздо дешевле.

И. Н. Веселовский

4102. Дискуссия по вопросу «Могут ли машины думать?» Хаусхолдер (Can machines think? Discussion. Householder Alston S.), Computers and Automat., 1953, 2, № 9, 14—15 (англ.)

4103. Дискуссия по вопросу «Могут ли машины думать?». Роджерс («Can machines think?» Discussion. Rodgers James L.), Computers and Automat., 1953, 2, № 9, 14 (англ.)

4104 К. Техника вычислений. Применительно к с. х. учету. Андреев П. П., Беленький Н. С., 180 стр., Госстатиздат, М., 1953, 4 р. 40 к.

4105 К. Теория и практика вычислительных машин. Рорберг (Theorie und Praxis der Rechenmaschinen. Rohrberg Albert, 72 S., B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1954, 3.90 DM), Math. Revs, 1954, 15, № 7, 652 (библ.)

4106 Д. К теории вычислительных устройств с линейными потенциометрами. Абдел-Мессих Мохеб Азиз (Zur Theorie der Rechengeräte mit linearen Potentiometern. Abdel-Messih

Moheb Aziz, Diss., 78 S., Zürich, ETH, 1954), Schweiz. Buch, 1954, B54, № 4, 165 (библ.)

4107 П. Вычислительное устройство. Эдуардс (Calculating device. Edwards Robert A.) [General Electric Co.]. Пат. США 2666575, кл. 235—61, 19.01.54

Сдвигающий двоичный регистр, состоящий из двух рядов триггеров. Л. М. Шехтман

4108 П. Определение старшего значащего разряда в вычислительной машине (Determination of a most significant digit in a computer) [National Research Development Corp.]. Австрал. пат. 158792, кл. 05.5, 30.09.54

В электронной цифровой вычислительной машине, работающей по последовательной схеме, находится устройство, подсчитывающее количество нулей, предшествующих старшему значащему разряду числа. При появлении первой цифры, отличной от нуля, устройство возвращается в исходное нулевое состояние. Н. Н. Поснов

4109 П. Схема триггера на кристаллических триодах, работающего на реле. Трент (Transistor trigger circuit for operating relays. Trent Robert L.) [Bell Telephone Laboratories, Inc.]. Пат. США 2665845, кл. 235—92, 12.01.54

Предлагается схема триггера на двух кристаллических триодах, включенных по схеме с заземленным эмиттером. Имеются диодные привязки уровней. Коллекторный ток одного из триодов проходит через обмотку реле. А. Б. Залкинд

4110 П. Двоично-десятичный счетчик. Диккинсон (Binary-decade counter. Dickinson Arthur H.) [International Business Machines Corp.]. Канад. пат. 490982, 3.03.53

Предлагается электронный счетчик на элементах с двумя устойчивыми состояниями, включающий, кроме обычных счетных элементов и связей, ламповую схему совпадения. О. К. Щербаков

4111 П. Многоэлементные детали схем. Стейгервуолт, Ошри (Multiple element circuit components. Steigerwalt Oliver I., Oshry Howard I.) [Erie Resistor Corp.]. Пат. США 2648804, кл. 317—101, 11.08.53

Основание представляет собой мозаичную панель из обожженной керамики. Элементы мозаики расположены так, что не перекрывают друг друга. Таким образом противоположные поверхности панели имеют соответствующее друг другу расположение элементов мозаики. На этих поверхностях, на участках, соответствующих отдельным элементам мозаики, располагается множество напечатанных обкладок. Элемент мозаики, заключенный между противоположными обкладками, имеет импеданс, определяемый свойствами обкладок и керамики. Одна из обкладок может занимать всю поверхность, т. е. являться общей.

В. К. Зейденберг

4112 П. Система селекции кода. Эрс, Смит (Code recognition system. Ayres William R., Smith Joel N.) [Radio Corp. of America]. Пат. США 2648829, кл. 340—147, 11.08.53

Схема селекции двоичного кода, представленного положительными и отрицательными импульсами. В каждом разряде селектора имеется возможность инвертировать фазу приходящих импульсов кода на обратную. В зависимости от выбранного для селекции кода, с каждой входной ступени код подается в прямой или обратной фазе на схему совпадения отрицательных импульсов, которая при совпадении запускает выходной мультивибратор. Схема селектора выполнена на триодах. Л. А. Любович

4113 П. Механизм установки делителя под делимым в начале деления. Гопкинс, Дейвис, Зиклер (Dividend-divisor aligning machanism. Hopkins George W., Davis Elwood A., Zickler Gottfried) [Friden Calculating Machine Co., Inc.]. Пат. США 2666580, кл. 235—63, 19.01.54

Подобные механизмы в несколько ином конструктивном выполнении имеются на автоматических моделях машин «Рейнметалл» и «Мерседес — Евклид». Е. Н. Маквецов

4114 П. Печатающий аппарат для табуляторов и суммирующих машин (Druckwerk für Addiermaschinen, Tabelliermaschinen und ähnliche Maschinen) [Mercedes Büromaschinen-Werke A. G., Zella-Mehlis]. Герм. пат. 2980, кл. 42 m 29, 2.09.53

Описываемый аппарат имеет следующие особенности:

1. При наборе и печатании значащих цифр в разрядах рублей автоматически печатает запятую, отделяющую разряды рублей и копеек, и нули справа от последней значащей цифры (например, 24000,00). Нули перед первой значащей цифрой не печатаются.

2. При снятии итога в случае, когда в счетчике сумма равна нулю, печатает знак ,00* или ,00°.

3. При наборе и печатании цифр только в разряде единиц (копеек) автоматически печатает нуль в разряде десятков и запятую, отделяющую разряды рублей и копеек (например, ,05). Н. П. Вашкевич

4115 П. Аппаратура для записи и воспроизведения данных. Гридли, Стекка (Data storage and reproducing apparatus. Gridley Darrin H., Stecca Anthony J.). Пат. США 2656524, кл. 340—206, 20.10.53

Аппаратура для приема и записи информации, поступающей от приемника многоканальной связи. Информация поступает в виде сигналов, модулированных по фазе. На входе происходит разделение информации по каналам. Для каждой выделенной части информации генерируется серия опорных сигналов. В зависимости от интервала времени между каждым опорным сигналом и соответствующим ему входным сигналом выделенной части информации генерируется различное число синхронизирующих импульсов. Эти импульсы считаются счетчиком, и результат, представленный в двоичной системе счисления, запоминается запоминающим устройством, предназначенным для данного канала. В. В. Карибский

4116 П. Фотоэлектрическая считывающая система. Миснер (Photoelectric translating system. Miessner Benjamin F.) [Miessner Inventions Inc.]. Пат. США 2654810, кл. 179—100.3, 6.10.53

Фотоэлектрическая система, которая, реагируя на световые лучи, отраженные от источника сигналов записанной информации, вырабатывает электрические импульсы. Система состоит из источника света, линзы, расположенной между источником света и носителем информации, и фотоэлектрического элемента. Линза собирает лучи источника света в сходящийся конус, ось которого перпендикулярна носителю информации, и расположена таким образом относительно источника сигналов информации, что конус световых лучей, отраженных от носителя информации, сходится в фокусе над носителем информации. Между линзой и средой, на которой записана информация, расположен фотоэлектрический элемент, активная поверхность которого воспринимает только отраженные лучи, которые проходят через фокус. Г. В. Шустарева

4117 П. Универсальный функциональный преобразователь. Хавиленд (Arbitrary function generator. Haviland Robert P.) [General Electric Co.]. Пат. США 2656101, кл. 235—61, 20.10.53

Функциональный преобразователь для воспроизведения произвольных функций, предназначенный для

применения в счетно-решающих устройствах Основан на использовании электроннолучевой трубки с непрозрачной маской, вырезанной по форме заданной для воспроизведения функции, фотоэлемента и системы управляемой развертки луча. Б. Я. Коган

4118 П. Вычислительное устройство. Ванс (Computing device. VanceArthurW.) [Radio Corporation of America]. Пат. США 2661153, кл. 235—61, 01.12.54

Электронное множительное устройство, выдающее произведение двух величин в виде напряжений.

Н. Ф. Семикова

4119 П. Дифференциатор. Хаупт (Differentiiergerät. Haupt Gerhard). Герм. пат. 7013, кл. 42c 12, 12.04.54

Описаны два варианта прибора для графического дифференцирования, который состоит из оптического устройства, дающего положение касательной в данной точке данной кривой, и механизма, автоматически дающего значение тангенса угла наклона этой касательной при любом отношении масштабов на координатных осях, в то время как прежние приборы этого рода были связаны с одним определенным отношением этих масштабов. Указана возможность такой замены одной детали прибора, при которой он становится прибором для решения обратной задачи — для построения точек интегральной кривой, соответствующей данной дифференциальной. Даны чертежи.

В. М. Брадис

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

4120. Речевое синтезирующее устройство. Гаррис (A speech synthesizer. Harris Cyril M.), J. Acoust. Soc. America, 1953, 25, № 5, 970—975 (англ.)

Подробно описывается речевое синтезирующее устройство, разработанное фирмой «Белл», которое осуществляет синтез речи из отдельных звуков — речевых коэффициентов. Последние записываются и хранятся на магнитном барабане и посредством селектирующего устройства, оформленного в виде клавиатуры, могут быть записаны на магнитную ленту в последовательности, определяемой порядком нажатия на клавиши. Ввиду того, что различные речевые коэффициенты, соответствующие различным звукам речи, имеют различную длительность, лента, оставаясь неподвижной во время записи одного коэффициента, после его записи продвигается точно на длину произведенной записи, причем запись производится вращающейся головкой, находящейся на одной оси с барабаном. Следующий коэффициент записывается непосредственно за предыдущим. Синтез осуществляется считыванием записанной ленты при ее равномерном движении. Читающая головка также вращается синхронно с барабаном, чем обеспечивается синхронность записи и чтения. Продвижение ленты точно на длину произведенной записи речевого коэффициента достигается использованием в хронирующей схеме колебаний частотой 10 *кгц*, наложенных на записанные на барабане речевые коэффициенты. Протяжка ленты пропорциональна количеству периодов, записанных на одном речевом коэффициенте. Указывается, что основным преимуществом данной системы синтеза является то, что любой речевой коэффициент может быть использован любое число раз в комбинации с любыми другими речевыми коэффициентами. Первоначальные испытания показали, что примерно 75% синтезированных слов были поняты средним слушателем без его предварительного знакомства с синтезированной речью. Так как эти слова воспроизводились не в форме разговора, то можно ожидать относительно большей понятности для обычной разговорной речи. Повышение качества синтезированной речи возможно получить за счет замены речевых коэффициентов, которые были взяты из натурального разговора, специально созданными речевыми коэффициентами. При автоматическом управлении селектирующим устройством с помощью описанного прибора можно синтезировать речь из сигналов, принятых по телеграфу. Л. А. Любови

4121. Искусственная речь — автоматическое понимание. Земанек (Künstliche Sprache — Automatisches Verstehen. Zemanek Heinz), Radiotechnik, 1953, 29, № 11, 381—386 (нем.)

Рассматриваются вопросы, связанные с созданием устройств искусственной речи. Одним из первых аппаратов искусственной речи был «Водер» (Voder — Voice Operation Demonstrator), разработка которого производилась в Нью-Йорке и Сан-Франциско с 1939 по 1940 г. Аппарат состоял из генераторов пилообразных колебаний и шума, а также 10 узкополосных фильтров, пропускающих токи разных частот, и устройств для регулировки величин этих токов. Путем установки различных величин токов в каждом из 10 каналов при последовательном воспроизведении в определенном порядке пилообразных колебаний и шума на выходе аппарата, можно было разобрать отдельные слова или даже предложения. Однако операции по составлению слов или фраз являлись весьма сложными и требовали от операторов большой натренированности. Более совершенным и более сложным аппаратом явился разработанный впоследствии «Вокодер» (Vocoder — Voice Coder). В этом аппарате управление совершается автоматически с помощью сигналов от передающего устройства, которые получаются путем выделения 10 участков частотного диапазона по 25 *гц* каждый, и сигнала основной частоты с шириной полосы 50 *гц*. На приемном конце звуковое сообщение восстанавливается, хотя и со значительными искажениями, но вполне разборчиво. Следовательно, применение «Вокодера» при передаче речевых сообщений дает возможность значительно сократить полосу передаваемых частот. Однако, ввиду большой сложности стоимость «Вокодера» очень высока.

Рассматриваются возможности преобразования речевого сообщения в текст и обратно. При построении аппарата, выполняющего подобные функции, возникают трудности вследствие того, что один и тот же текст может произноситься по-разному, с различными акцентами или интонацией, так же как и одинаково произносимый текст может быть записан по-разному с малыми, или заглавными буквами, или с помощью разных шрифтов и алфавитов. Однако был построен простейший аппарат, который осуществляет автоматическое «понимание» того, какие сочетания из звуков были произнесены. Этот аппарат, упрощенная схема которого достаточно подробно рассматривается, различает, какая из 10 цифр произнесена в микрофон. Действие этого аппарата основывается на сравнении электрических сигналов от произносимой цифры сигналов, заранее установленных в аппарате, в результате чего начинает проводить ток лишь одна из 10 электронных ламп, отмеченная произносимой цифрой.

Библиография, 7 названий. В. К

4122. Автоматические измерения и регистрация положений звезд (Positions of stars measured and recorded automatically), Electr. Engng, 1953, 72, № 12, 1141 (англ.)

Краткая заметка о новой электронной машине, автоматически просматривающей пластинки со снимками звездного неба, отождествляющей отдельны

звезды и регистрирующей их положение с точностью о десятой доли микрона и записывающей результат а перфокартах. Машина за один день делает столько змерений, сколько квалифицированный работник мо- кет сделать за неделю. Т. С. Кириллова

4123. Применение перфорационных машин ИБМ для информационных работ. **Айкеле** (Wirtschaftlicher Einsatz von IBM Lochkartenmaschinen bei der Dokumentation. Aikele Erwin), Nachr. Dokum., 1953, 4, № 2, 92—98 (нем.)

Рекомендуется применение счетно-аналитических машин в целях автоматического отыскания требуемых сведений с перфокарт. В качестве выбирающей машины предлагается сортировка, на которой за 1 час возможно просмотреть картотеку из 24000 перфокарт, если выбор ведется по одному 16-значному признаку. При выборе по нескольким признакам перфокарты должны просматриваться несколько раз. Б. М. Раков

4124. Газоразрядные лампы с холодным катодом как коммутирующий элемент в автоматической телефонии. **Домберг, Сикс** (A cold cathode gas-discharge tube as a switching element in automatic telephony. Domburg J., Six W.), Philips Techn. Rev., 1954, 15, № 10, 265—280 (англ.)

Рассматривается применение газоразрядных ламп с холодным оксидным катодом для замены электромеханических приборов в автоматической телефонии. Для этой цели применены газоразрядные аргоновые лампы с одним или двумя поджигающими электродами тип Z 500 T и Z 501T). Работа разбираемых схем основана на том, что при отсутствии смещения на поджигающем электроде падение напряжения между анодом и катодом лампы выше чем 175 *в*, а при наличии разряда лежит в пределах 175—70 *в*, в зависимости от тока через поджигающий электрод. При анодном токе 1 *ма* лампа представляет разговорному току сопротивления примерно 500 *ом*. Напряжение зажигания составляет 65÷78 *в*. Срок службы таких ламп свыше 5000 часов, считая только время при наличии разряда, и поэтому в действительности может быть значительно большим. Рассмотрены схемы реле (с различной комбинацией контактов), счетчиков, схемы вызова, регистров, селекторов, сигнальных схем, мультивибраторов и других, осуществленных на базе этих ламп. Большинство этих схем являются частью экспериментального, полностью электронного телефонного коммутатора, который в течение нескольких лет работает в исследовательской лаборатории фирмы «Филипс».

Л. А. Любович

4125. Вычислительная машина ускорит движение почтовой корреспонденции. **Уэсли** (Thinking machine will speed mail. Wesley S. Griswold), Popul. Sci., 1953, 163, № 4, 114—117 (англ.)

Сообщение о разрабатываемой в почтовом департаменте Канады машине для сортировки писем на почтовых центрах больших городов.

Вначале почтовые адреса печатаются на обратной стороне конверта с помощью кода из точек. Дальнейшее движение писем в машине направляется устройствами считывания кодированных адресов. Устройство считывания использует либо схемы с фотоэлементами, либо с телевизионной разверткой. Из устройства считывания коды адресов поступают в запоминающее устройство на магнитном барабане, которое содержит данные о большом количестве адресов в виде соответствующих кодов. При совпадении кодов адресов сортируемых писем и нужных адресов в запоминающем устройстве происходит автоматическая сортировка писем на группы. Машина будет сортировать до 130000 писем в 1 час. В. Б.

4126. Экспериментальный регистр-транслятор для автоматических систем междугородной связи. **Бродхерст** (An experimental register-translator for universal subscriber — subscriber dialling. Broadhurst S. W.), P. O. Electr. Engrs J., 1954, 47, Part 2, 97—101 (англ.)

При вызове абонента автоматической телефонной сети требуется временное запоминание цифр номера этого абонента. В статье подробно описывается разрабатываемый универсальный регистр-транслятор, основанный на применении ультразвуковых ртутных линий задержки и предназначенный для систем полуавтоматической междугородной связи. Описываемый регистр-транслятор при наборе номера абонента автоматически выбирает нужную магистральную линию и производит необходимые расчеты (с учетом существующих тарифов) для начисления абонентной платы. Указывается, что применение этого регистра-транслятора может дать большую экономию средств и сократить время вызова. Л. В. Кутуков

4127. Роль электроники в морской артиллерии. **Бриджес** (The role of electronics in naval ordnance. Bridges J. M.), Trans. Inst. Radio Engrs, 1953, PGIE—1, Aug., 7—10 (англ.)

В общих чертах рассматривается применение электроники в военно-морском флоте США и отмечается бурный рост этой области военной техники за последние 10—15 лет. В настоящее время электронные приборы являются важнейшим элементом различных видов оружия и приборов управления. Например, на одном из миноносцев в артиллерийских приборах используется свыше 7000 электронных ламп, не считая тысяч ламп во взрывателях снарядов и торпед. Указываются следующие области применения электроники в военно-морском флоте: радиолокация, инфракрасная техника, акустические и магнитные системы управления, электронные счетные машины, черно-белое и цветное телевидение, многоканальная связь. С.

4128. Вычислительное устройство для определения момента сброса парашютистов и грузов с самолета (Paradrop computer), Aircraft (Toronto), 1954, 16, № 3, 70, 96 (англ.)

Сообщение о разработке вычислительного устройства для определения момента сброса с самолета парашютистов и грузов на парашютах. Устройство обеспечивает приземление в заданном месте. Б. Я. Коган

4129. Магнитное запоминающее устройство служит целям управления воздушным сообщением (Magnetic memory system may aid in solving air traffic problems), Electr. Engng, 1953, 72, № 10, 944 (англ.)

Сообщение фирмы «Ремингтон Ранд» (Remington Rand) о выпуске магнитного запоминающего устройства для хранения и обработки планов полетов самолетов. См. РЖМат, 1955, 537, 3533, 3534. Л. С. Легезо

4130. Автоматическое вычислительное устройство для управления полетом самолетов дальнего действия. **Шалл** (Automatic cruise-control computer for long-range aircraft. Shull J. R.), Electr. Engng, 1953, 72, № 4, 309—312 (англ.)

Устройство, позволяющее сохранять на всем протяжении наиболее оптимальный режим работы двигателя, достигая этим максимальной дальности полета. Оно беспрерывно фиксирует воздушную скорость и расход горючего, подсчитывая их отношение (миль/фунт), являющееся полетным параметром. Функциональная зависимость полетного параметра (миль/фунт) от оборотов в мин. (полетная характеристика) имеет явно выраженный максимум для всех самолетов, независимо от типа силовой установки.

Действуя на систему силового управления, автоматическое вычислительное устройство регулирует обороты так, чтобы рабочая точка колебалась около максимума полетной характеристики, в результате чего

достигается наиболее эффективный режим работы двигателя.

Данная статья послужила основой при проектировании подобных устройств для воздушных сил.

В. М. Тарасевич

4131. Новая радиолокационная метеорологическая установка (A new radar meteorological system), Newnes Pract. Mech., 1954, **21**, № 242, 200—202 (англ.)

Установка предназначена для обследования верхних слоев атмосферы. Она состоит из наземной локационной станции, двух типов радиозондов с водородными баллонами и наземного счетного устройства.

Один тип радиозонда фиксирует данные только о ветре. Движение радиозонда в пространстве определяется по времени прохождения запрашивающих импульсов от наземной станции к радиозонду и ответных импульсов, генерируемых ответчиком радиозонда обратно на станцию, а также по направлению прихода ответных импульсов. Направление и скорость ветра на разных высотах рассчитывается автоматически специальным счетным устройством, исходя из непрерывного изменения местоположения радиозонда при его полете. Запись данных о ветре ведется в полярных координатах на специальных картах.

Другой тип радиозонда, помимо данных о ветре, обеспечивает информацию о температуре, давлении, влажности. Передача информации осуществляется подачей двойных ответных импульсов. Временной интервал между импульсами характеризует передаваемый метеорологический параметр. Запись параметров ведется двойная: графическая, для быстрого общего обзора, и цифровая, являющаяся основной.

Приведены основные технические данные установки. Изложены особенности и преимущества новой локационной метеорологической установки.

Р. Л. Драбкин

4132. Управление станками при помощи магнитной ленты (Magnetic tape control of machine tools), Engineer, 1954, **197**, № 5135, 935—937 (англ.)

Дается описание принципа действия устройства управления прецизионным расточным станком «Бормatик» (Borematicc), использующего магнитную ленту. Устройство разработано и построено фирмой Alfred Herbert, Ltd. в Ковентри. Устройство состоит из магнитной ленты и ряда электронных схем, управляющих соленоидами, которые в свою очередь вызывают соответствующие перемещения инструмента. На магнитной ленте записывается комбинация частот, каждая из которых через электронную схему управляет определенным соленоидом. Например, для того чтобы задать движение инструмента в двух направлениях, необходимо записать комбинацию из двух частот. Все частоты записываются на одной дорожке ленты. В. Д. Князев

4133. Управление фрезерным станком с помощью электроники (Electronic machinist works like phonograph), Sci. News Letter, 1953, **64**, № 22, 345 (англ.)

Краткое сообщение об электронном устройстве, управляющем автоматическим процессом изготовления на фрезерных станках деталей для реактивных самолетов. Все команды для производства тех или иных операций станок получает в виде импульсов, считываемых с магнитной ленты. Запись программы производится во время изготовления рабочим первой детали, когда движения обрабатывающего инструмента преобразуются в электрические импульсы, которые записываются на ленту. Указывается, что применение устройства позволит увеличить скорость выпуска деталей в два раза. Первый коммерческий образец устройства должен быть сделан в начале 1954 г.

В. Н. Аверин

4134. Оборудование для механизированного учета продажи предметов одежды. Хеслер (Garment tag equipment Hessler Orville G.), Review of input and output equipment used in computing systems. Joint AIEE-IRE-ACM Computer Conf., 1952, New York, 1953, 122—125 (англ.)

Приводится описание оборудования, предназначенного для механизации учета розничной продажи предметов одежды. Каждый предмет одежды снабжается специальным ярлыком, на котором с помощью перфорации записываются цена, сорт, размер и т. д. Ярлык состоит из двух половин, при продаже одна половина отрывается, данные с нее с помощью специальной машины переносятся на стандартные перфокарты, с которыми можно производить обычные статистические операции.

Л. В. Кутуков

4135 П. Вычислительное устройство для гиперболической системы навигации. Гейл (Hyperbolic analogue computer. Gale Richard J.) [United States of America as represented by the Secretary of the Army]. Пат. США 2681764, кл. 235—61, 22.06.54

Функциональная схема вычислительного устройства, работающего в гиперболической системе навигации и обеспечивающего автоматическое поддержание нужного направления при работе нескольких передатчиков. Система состоит из приемника, преобразователя и ряда выпрямителей, выпрямляющих линейные напряжения трехфазной сети (преобразованные по фазе и амплитуде) и подающих выпрямленные напряжения через схему сравнения на указательный прибор.

И. М. Витенберг

4136 П. Вычислительное устройство для подводной лодки. Хаммонд (Submarine attack computer. Hammond John Hays, Jr). Пат. США 2689083, кл. 235—61.5, 14.09.54

Механическое вычислительное устройство для определения направления подводной лодки на атакуемую цель, расстояния до нее и т. п.

И. М. Витенберг

4137 П. Устройство для слежения за целью. Лундстром, Малтанер (Regenerative tracking apparatus. Lundstrom Alexis A., Malthaner William A.) [Bell Telephone Laboratories, Inc.]. Пат. США 2658677, кл. 235—61.5, 10.11.53

Величина поворота входного вала устройства, пропорциональная скорости изменения координаты цели, преобразуется специальной схемой в электрическое напряжение. Одновременно величина поворота отмечается на шкале прибора с помощью поворачивающегося диска шкалы.

Полученное напряжение приводит в движение мотор. Угол поворота вала мотора отрабатывается обычной следящей системой, состоящей из мотора, дифференциального устройства и управляющего элемента.

Выходной вал следящей системы наряду с воздействием на нагрузку, поворачивает второй диск шкалы, стремясь свести ошибку рассогласования положения входного и выходного валов к нулю. Предусмотрена корректировка скорости вращения второго мотора.

В. Н. Аверин

4138 П. Система наведения орудия. Кемпбелл, Хилл, Мак-Кейб, Гаррис (Gun directing system. Campbell David J., Hill Richmond, Mc Cabe Selden P., Jr, Harris Herbert, Jr) [The Sperry Corp.]. Пат. США 2660371, кл. 235—61.5, 24.11.53

Система наведения орудия, в которую входят как основные компоненты следующие устройства: а) счетно-решающее устройство для нахождения упрежденной точки; б) механизм для определения коорди-

ат места разрыва снаряда (горизонтальная дальность высота); в) указатель разности между вновь вычисленными координатами и старыми, воздействующий а устройство, которое в зависимости от величины азности (ошибки рассогласования) выдает сигнал пределенной величины, возбуждающий обмотки ста-ора сельсина-трансформатора; г) устройство, вра-ающее ротор сельсина-трансформатора в соответствии с квадрантом угла места цели; д) устройство, ающее сигнал ошибки времени полета. В. Н. Аверин

4139 П. Вычислительное устройство АМА. Лок, Уивер (Automatic message accounting system. Locke George A., Weaver Allan) [Bell Telephone Laboratories, Inc.]. Пат. США 2642493, кл. 178—17.5, 16.06.53

Релейный запоминающий регистр и распределитель мпульсов системы АМА (РЖМат, 1953, 512).

4140 П. Схема преобразования телеграфного кода (Telegraph code translating circuit) [Standard Telephones and Cables Pty. Ltd.]. Австрал. пат. 154523, 7.01.54

4141 П. Устройство преобразования кода для пишущей машины. Дорфман (Electronic code-typewriter system. Dorfman Nathaniel G. A.). Пат. США 2662112, кл. 178—17, 8.12.53

Устройство преобразования буквенного текста, печатаемого на обычной клавиатуре, в сигналы международного кода Морзе. В. Б.

4142 П. Электрические декодирующие цепи. Райт, Уэйр (Electrical decoding circuits. Wright Esmond Philip Goodwin, Weir Donald Adams) [Standard Telephone and Cables Ltd.]. Пат. США 2648725, кл. 178—88, 11.08.53

Прибор для декодирования кодовых комбинаций импульсов в телеграфном аппарате, состоящий из триггера для обнаружения состояния каждого элемента кода (знак или интервал) и двух триггеров для запоминания состояния первых двух элементов кодовой комбинации. В соответствии с этим состоянием вентильные цепи выбирают одну из четырех газоразрядных ламп, с несколькими холодными катодами каждая. В. П. Разроев

4143 П. Система селективной сигнализации. Врум (Selective signaling system. Vroom Edward) [Bell Telephone Laboratories, Inc.]. Пат. США 2648831, кл. 340—164, 11.08.53

Сообщается о системе вызова абонентом станции, при которой для регистрации числа, набранного абонентом, используются многоэлектродные газоразрядные лампы. В. П. Разроев

См. также: 3593, 3983, 3984, 3996, 3997, 4016